Systém přirozené dedukce výrokové logiky

Korektnost, úplnost a bezespornost

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky, FPF SU Opava

Poslední aktualizace: 6. října 2008

Věta o korektnosti

Věta (O korektnosti Systému přirozené dedukce výrokové logiky)

Každá formule dokazatelná v Systému přirozené dedukce výrokové logiky je logicky platná, tedy pro každou formuli A výrokové logiky platí:

$$\vdash A \quad \Longrightarrow \quad \models A$$

Věta o korektnosti

Důkaz

Je třeba dokázat:

- *korektnost dedukčních pravidel* – axiomy musí být logicky platné formule (tautologie), ostatní pravidla musí zachovávat splnitelnost (když jsou předpoklady pravdivé, je pravdivý i závěr pravidla)
    - ve výrokové logice stačí pro důkaz jejich korektnosti použít sémantické tabulky
- *korektnost konstrukce důkazu v SPD VL* – dokazujeme, že postup dokazování (používání dedukčních pravidel) v systému je korektní
    - dokazujeme matematickou indukcí podle délky důkazu formule

Důkaz (Dedukční pravidla)

$\vdash A \vee \neg A$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

$A \rightarrow B, A \vdash B$

A	B	$A \rightarrow B$	A	B
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

$A, B \vdash A \& B$

A	B	$A \& B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

atd. pro další dedukční pravidla

Důkaz (Definice důkazu)

- Pokud jde o důkaz z předpokladů (máme alespoň jeden předpoklad), pak dokazujeme, že splnitelnost závěru je podmíněna splnitelností předpokladů, tedy v každém ohodnocení, ve kterém jsou předpoklady splnitelné, musí být splnitelný i závěr.
- *Báze indukce:* První člen posloupnosti je axiom nebo předpoklad. Platnost axiomů je již dokázána, splnitelností předpokladů je podmíněna splnitelnost závěru pro dané ohodnocení.
- *Předpoklad indukce:* předpokládejme, že je věta dokázána až ke k-tému členu posloupnosti důkazu (až k této formuli včetně jsou členy posloupnosti buď předpoklady nebo logicky platné formule).

Důkaz (Definice důkazu)

- Pokud jde o důkaz z předpokladů (máme alespoň jeden předpoklad), pak dokazujeme, že splnitelnost závěru je podmíněna splnitelností předpokladů, tedy v každém ohodnocení, ve kterém jsou předpoklady splnitelné, musí být splnitelný i závěr.
- *Báze indukce:* První člen posloupnosti je axiom nebo předpoklad. Platnost axiomů je již dokázána, splnitelností předpokladů je podmíněna splnitelnost závěru pro dané ohodnocení.
- *Předpoklad indukce:* předpokládejme, že je věta dokázána až ke k-tému členu posloupnosti důkazu (až k této formuli včetně jsou členy posloupnosti buď předpoklady nebo logicky platné formule).

Důkaz (Definice důkazu)

- Pokud jde o důkaz z předpokladů (máme alespoň jeden předpoklad), pak dokazujeme, že splnitelnost závěru je podmíněna splnitelností předpokladů, tedy v každém ohodnocení, ve kterém jsou předpoklady splnitelné, musí být splnitelný i závěr.
- *Báze indukce:* První člen posloupnosti je axiom nebo předpoklad. Platnost axiomů je již dokázána, splnitelností předpokladů je podmíněna splnitelnost závěru pro dané ohodnocení.
- *Předpoklad indukce:* předpokládejme, že je věta dokázána až ke k-tému členu posloupnosti důkazu (až k této formuli včetně jsou členy posloupnosti buď předpoklady nebo logicky platné formule).

Důkaz (Definice důkazu)

- *Krok indukce:* Člen důkazu s indexem $k+1$:
  - axiom – jeho logická platnost je již dokázána.
  - předpoklad – dto.
  - vznikl aplikací některého dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti – toto pravidlo bylo použito na logicky platné formule nebo na formule splnitelné pro všechna ohodnocení, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady. Je již dokázáno, že dedukční pravidla zachovávají splnitelnost, tedy v posloupnosti důkazu na místě $k+1$ je formule, která je logicky platná nebo splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady až dosud v důkazu uvedené.
- Obdobně lze dokázat také korektnost nepřímého důkazu, důkazů z hypotéz a větvených důkazů.

Důkaz (Definice důkazu)

- *Krok indukce:* Člen důkazu s indexem $k + 1$:
  - axiom – jeho logická platnost je již dokázána.
  - předpoklad – dto.
  - vznikl aplikací některého dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti – toto pravidlo bylo použito na logicky platné formule nebo na formule splnitelné pro všechna ohodnocení, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady. Je již dokázáno, že dedukční pravidla zachovávají splnitelnost, tedy v posloupnosti důkazu na místě $k + 1$ je formule, která je logicky platná nebo splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady až dosud v důkazu uvedené.
- Obdobně lze dokázat také korektnost nepřímého důkazu, důkazů z hypotéz a větvených důkazů.

Důkaz (Definice důkazu)

- *Krok indukce:* Člen důkazu s indexem $k + 1$:
  - axiom – jeho logická platnost je již dokázána.
  - předpoklad – dto.
  - vznikl aplikací některého dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti – toto pravidlo bylo použito na logicky platné formule nebo na formule splnitelné pro všechna ohodnocení, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady. Je již dokázáno, že dedukční pravidla zachovávají splnitelnost, tedy v posloupnosti důkazu na místě $k + 1$ je formule, která je logicky platná nebo splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady až dosud v důkazu uvedené.
- Obdobně lze dokázat také korektnost nepřímého důkazu, důkazů z hypotéz a větvených důkazů.

Důkaz (Definice důkazu)

- *Krok indukce:* Člen důkazu s indexem $k+1$:
  - axiom – jeho logická platnost je již dokázána.
  - předpoklad – dto.
  - vznikl aplikací některého dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti – toto pravidlo bylo použito na logicky platné formule nebo na formule splnitelné pro všechna ohodnocení, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady. Je již dokázáno, že dedukční pravidla zachovávají splnitelnost, tedy v posloupnosti důkazu na místě $k+1$ je formule, která je logicky platná nebo splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady až dosud v důkazu uvedené.
- Obdobně lze dokázat také korektnost nepřímého důkazu, důkazů z hypotéz a větvených důkazů.

Důkaz (Definice důkazu)

- *Krok indukce:* Člen důkazu s indexem $k+1$:
  - axiom – jeho logická platnost je již dokázána.
  - předpoklad – dto.
  - vznikl aplikací některého dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti – toto pravidlo bylo použito na logicky platné formule nebo na formule splnitelné pro všechna ohodnocení, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady. Je již dokázáno, že dedukční pravidla zachovávají splnitelnost, tedy v posloupnosti důkazu na místě $k+1$ je formule, která je logicky platná nebo splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady až dosud v důkazu uvedené.
- Obdobně lze dokázat také korektnost nepřímého důkazu, důkazů z hypotéz a větvených důkazů.

Lemma o neutrální formuli

Lemma (Lemma o neutrální formuli)

$$B \vdash A, \quad \neg B \vdash A \quad \Longrightarrow \quad \vdash A$$

Lemma o neutrální formuli

Důkaz

1. $B \rightarrow A$ *VD na Př1*
2. $\neg B \rightarrow A$ *VD na Př2*
3. $B \vee \neg B$ *A (H1 ∨ H2)*

a) B	*H1*	a) $\neg B$	*H2*
b) A	*EI(1,a)*	b) A	*EI(2,a)*

4. A *(z větveného důkazu)*

Tedy jestliže lze formuli dokázat z některé formule i její negace, pak tento předpoklad již nemusíme zapisovat.

Lemma

Nechť F *je formule obsahující právě výrokové proměnné* $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Ve zvolené valuaci* v *označme:*

$F' = F$, *pokud* $I(F, v) = 1$,
$F' = \neg F$, *pokud* $I(F, v) = 0$

$p_i' = p_i$, *pokud* $v(p_i) = 1$,
$p_i' = \neg p_i$, *pokud* $v(p_i) = 0$ *pro každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$

Pak platí

$$p_1', p_2', \ldots, p_n' \quad \vdash \quad F'$$

Důkaz

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle složitosti formule.

- *Báze indukce:* $F = p$ (0 logických spojek)
  $p' \;\vdash\; p'$ platí, protože jde o substituci do druhého dedukčního pravidla ($\vdash\; A \rightarrow A$).
- *Předpoklad indukce:* předpokládejme, že věta platí pro formule B, C o složitosti nejvýše k:
  $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \;\vdash\; B'$
  $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \;\vdash\; C'$
- *Krok indukce:* dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k + 1$.

Důkaz

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle složitosti formule.

- *Báze indukce:* $F = p$ (0 logických spojek)
  $p' \vdash p'$ platí, protože jde o substituci do druhého dedukčního pravidla ($\vdash A \rightarrow A$).
- *Předpoklad indukce:* předpokládejme, že věta platí pro formule B, C o složitosti nejvýše k:
  $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \vdash B'$
  $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \vdash C'$
- *Krok indukce:* dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

Důkaz

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle složitosti formule.

- *Báze indukce:* $F = p$ (0 logických spojek)
  $p' \ \vdash \ p'$ platí, protože jde o substituci do druhého dedukčního pravidla ($\vdash \ A \rightarrow A$).
- *Předpoklad indukce:* předpokládejme, že věta platí pro formule B, C o složitosti nejvýše k:
  $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \ \vdash \ B'$
  $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \ \vdash \ C'$
- *Krok indukce:* dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k + 1$.

Důkaz (a) $F = \neg B$, B je formule o složitosti k)

Máme dokázat, že platí $p_1', p_2', \ldots, p_n' \vdash (\neg B)'$. Protože platí předpoklad indukce, dokazujeme $B' \vdash (\neg B)'$. Jsou dvě možnosti:

1) $I(B) = 0 \Rightarrow$ dokazujeme $\neg B \vdash \neg B$, což platí (axiom)
2) $I(B) = 1 \Rightarrow$ dokazujeme $B \vdash \neg\neg B$, to je dokázáno jako pomocné pravidlo zavedení negace.

Důkaz (b) $F = B \rightarrow C$, B, C jsou formule složitosti nejvýše k)

Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$B \rightarrow C$	*dokazujeme* $(B', C' \vdash A')$*:*	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$	①
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \rightarrow C$	②
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$	③
1	1	1	$B, C \vdash B \rightarrow C$	④

Důkaz (b) $F = B \to C$, B, C jsou formule složitosti nejvýše k)

Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$B \to C$	dokazujeme ($B', C' \vdash A'$):	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \to C$	①
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \to C$	②
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \to C)$	③
1	1	1	$B, C \vdash B \to C$	④

①, ②: Dokazujeme $\neg B \vdash B \to C$, neboli $\neg B, B \vdash C$ (podle věty o dedukci)
$\Rightarrow$ dokázáno, pravidlo sporné množiny.

Důkaz (b) $F = B \to C$, B, C jsou formule složitosti nejvýše k)

Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$B \to C$	dokazujeme ($B', C' \vdash A'$):	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \to C$	1
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \to C$	2
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \to C)$	3
1	1	1	$B, C \vdash B \to C$	4

3: Dokážeme nepřímým důkazem:

1. B Př1
2. $\neg C$ Př2
3. $B \to C$ NZ
4. C EI(1,3), spor s 2

Důkaz (b) $F = B \to C$, B, C jsou formule složitosti nejvýše k)

Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$B \to C$	*dokazujeme* $(B', C' \vdash A')$*:*	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \to C$	1
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \to C$	2
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \to C)$	3
1	1	1	$B, C \vdash B \to C$	4

4: Dokážeme přímým důkazem:

1. C Př1
2. $B \to C$ ZI(1)

Úplnost

Věta (Věta o úplnosti Systému přirozené dedukce výrokové logiky)

Každá logicky platná formule výrokové logiky je dokazatelná v Systému přirozené dedukce výrokové logiky, tedy platí

$$\models A \quad \Longrightarrow \quad \vdash A$$

Důkaz

Předpokládejme, že A je tautologie
$\Rightarrow$ A je vždy splnitelná, pro všechna ohodnocení platí

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

$\Rightarrow$ Pak platí zároveň tyto věty:

$$\begin{array}{rcl} p_1, p'_2, \ldots, p'_n & \vdash & A \\ \neg p_1, p'_2, \ldots, p'_n & \vdash & A \end{array}$$

$\Rightarrow$ Podle lemmatu o neutrální formuli pak platí

$$p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

Stejně budeme postupovat i pro další výrokové proměnné, po n uplatněních tohoto postupu získáme větu $\vdash A$. Tím je vztah dokázán.

Věta o bezespornosti

Věta (Věta o bezespornosti Systému přirozené dedukce VL)

Systém přirozené dedukce výrokové logiky je bezesporný.

Věta o bezespornosti

Důkaz

Větu dokážeme sporem.

Kdyby byl systém sporný, pak by existovala formule A taková, že $\vdash A$ a zároveň $\vdash \neg A$.

Potom ale podle věty o korektnosti Systému přirozené dedukce výrokové logiky platí $\models A$ a zároveň $\models \neg A$, což ale není možné. Proto je Systém přirozené dedukce výrokové logiky bezesporný.