Systém přirozené dedukce výrokové logiky

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky
Filozoficko-Přírodovědecká fakulta
Slezské univerzity, Opava

Systém přirozené dedukce

- Jazyk: přejímá jazyk výrokové logiky.
- Dedukční pravidla: viz dále.

Dedukční pravidla

1.	$\vdash\ A \vee \neg A$	A	axiom
2.	$\vdash\ A \rightarrow A$	A	axiom
3.	$A, B\ \vdash\ A \,\&B$	ZK	zavedení konjunkce
4.	$A \,\&B\ \vdash\ A$ nebo $A \,\&B\ \vdash\ B$	EK	eliminace konjunkce
5.	$A\ \vdash\ A \vee B$ nebo $B\ \vdash\ A \vee B$	ZD	zavedení disjunkce
6.	$A \vee B, \neg A\ \vdash\ B$ nebo $A \vee B, \neg B\ \vdash\ A$	ED	eliminace disjunkce
7.	$B\ \vdash\ A \rightarrow B$	ZI	zavedení implikace
8.	$A \rightarrow B, A\ \vdash\ B$	EI	eliminace implikace
9.	$A \rightarrow B, B \rightarrow A\ \vdash\ A \leftrightarrow B$	ZE	zavedení ekvivalence
10.	$A \leftrightarrow B\ \vdash\ A \rightarrow B$ nebo $A \leftrightarrow B\ \vdash\ B \rightarrow A$	EE	eliminace ekvivalence

Věta o substituci

Nechť F je některá formule výrokové logiky, která obsahuje právě výrokové proměnné $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (a žádné další). Nechť dále $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou jakékoliv formule výrokové logiky.

Formuli F' vytvoříme tak, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ nahradíme všechny výskyty výrokové proměnné p_i ve formuli F formulí A_i.

Potom jestliže F je tautologie, pak také F' je tautologie.

Věta o substituci

Důkaz:

- $v(p_i) \in \{0,1\}$, $I(A_i) \in \{0,1\}$
- F je tautologie $\Longrightarrow$ splnitelná pro každé ohodnocení proměnných $p_i \Longrightarrow$ za p_i můžeme dosadit cokoliv, třeba A_i
- po dosazení A_i za p_i se formule chová stejně, tedy také F' je tautologie

Rozšířená věta o substituci

Nechť F je formule výrokové logiky, která obsahuje podformuli A. Dále nechť B je formule výrokové logiky ekvivalentní s formulí A.

Formuli F' vytvoříme tak, že v F nahradíme podformuli A formulí B. Jestliže F je tautologie, pak i F' je tautologie.

Rozšířená věta o substituci

***Důkaz*:**

- $A \Leftrightarrow B \quad I(A) = I(B)$
- $\Longrightarrow$ po záměně A za B platí $F' \Leftrightarrow F$
- $\Longrightarrow$ jestliže F je tautologie, pak i F' je tautologie

Přímý důkaz

Přímý důkaz formule F *z předpokladů* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ je posloupnost formulí $A_1, A_2, \ldots, A_m$, kde $F = A_m$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí pro A_i některá z těchto možností:

- $A_i \in \{P_1, \ldots, P_n\}$ (tj. je to některý z předpokladů),
- A_i je axiom,
- A_i vznikla použitím některého dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti.

Přímý důkaz formule F (tj. bez předpokladů) je definován stejně, jen $n = 0$.

Věta o dedukci

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \rightarrow Z$$

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ldots$$

$$\vdash P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow \ldots (P_n \rightarrow Z) \ldots)$$

Věta o dedukci – důkaz

provedeme pro n=2, lze zobecnit pro jakékoliv n.

1) „$\Leftarrow$“: $\vdash\ P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow Z) \quad \Longrightarrow \quad P_1, P_2 \vdash\ Z$

1.	$P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow Z)$	Předpoklad 1
2.	P_1	Předpoklad 2
3.	P_2	Předpoklad 3
4.	$P_2 \rightarrow Z$	EI(1,2)
5.	Z	EI(3,4)

Věta o dedukci – důkaz

provedeme pro n=2, lze zobecnit pro jakékoliv n.

2) „⇒“: $P_1, P_2 \vdash Z \quad \Longrightarrow \quad \vdash P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow Z)$

1.	P_1	Předpoklad 1
2.	P_2	Předpoklad 2
3.	Z	Použití věty v předpokladu
4.	$P_2 \rightarrow Z$	ZI(3)
5.	$P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow Z)$	ZI(4)

Příklad

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \ \vdash \ C$$

Příklad

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \ \vdash \ C$$

1. $A \rightarrow B$ Př1
2. $B \rightarrow C$ Př2
3. A Př3

Příklad

$$A \to B,\ B \to C,\ A \ \vdash \ C$$

1.	$A \to B$	Př1
2.	$B \to C$	Př2
3.	A	Př3
4.	B	EI(1,3)

Příklad

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A\ \vdash\ C$$

1.	$A \rightarrow B$	Př1
2.	$B \rightarrow C$	Př2
3.	A	Př3
4.	B	EI(1,3)
5.	C	EI(2,4)

Příklad

Dokázali jsme také věty:

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \ \vdash\ A \rightarrow C$$

$$A \rightarrow B \ \vdash\ (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$B \rightarrow C \ \vdash\ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\vdash\ (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\vdash\ (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Příklad

$A, \neg A \;\vdash\; B$

1. A Př1
2. $\neg A$ Př2
3. $A \vee B$ ZD(1)
4. B ED(2,3)

Nepřímý důkaz

formule F z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ je posloupnost formulí $A_1, A_2, \ldots, A_m$, kde

- pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $A_i = P_i$,
- $A_{n+1} = \neg F$,
- $\forall i > (n+1)$ pro A_i platí některá z možností:
  - $A_i \in \{P_1, \ldots, P_n\}$,
  - A_i je axiom,
  - A_i vznikla použitím někt. dedukčního pravidla na předchozí členy posloupnosti,
- $A_m = \neg A_j$ pro některé $j < m$ (spor).

Nepřímý důkaz formule F (tj. bez předpokladů) je definován stejně, jen $n = 0$.

Příklad

$$\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \,\&\neg B)$$

1. $\neg(A \vee B)$ Př1
2. A NZ (negace prvního závěru)

Příklad

$$\neg(A \vee B) \;\rightarrow\; (\neg A \,\& \neg B)$$

1. $\neg(A \vee B)$ — Př1
2. A — NZ (negace prvního závěru)
3. $A \vee B$ — ZD(2), spor s 1.

   $\Rightarrow\; \neg A$

Příklad

$$\neg(A \vee B) \;\rightarrow\; (\neg A \,\&\neg B)$$

1. $\neg(A \vee B)$ Př1
2. A NZ (negace prvního závěru)
3. $A \vee B$ ZD(2), spor s 1.
   $\Rightarrow\; \neg A$
4. B NZ (negace druhého závěru)
5. $A \vee B$ ZD(4), spor s 1.
   $\Rightarrow\; \neg B$

Příklad

$\neg(A \vee B) \;\rightarrow\; (\neg A \,\&\neg B)$

1. $\neg(A \vee B)$ — Př1
2. A — NZ (negace prvního závěru)
3. $A \vee B$ — ZD(2), spor s 1.
   $\Rightarrow\; \neg A$
4. B — NZ (negace druhého závěru)
5. $A \vee B$ — ZD(4), spor s 1.
   $\Rightarrow\; \neg B$
6. $\neg A \,\&\neg B$ — ZK(3,5)

Příklad

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \;\vdash\; (B \rightarrow A)$$

Příklad

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \;\vdash\; (B \rightarrow A)$$

VD: $(\neg A \rightarrow \neg B), B \;\vdash\; A$

Příklad

$(\neg A \rightarrow \neg B) \ \vdash \ (B \rightarrow A)$

VD: $(\neg A \rightarrow \neg B), B \ \vdash \ A$

1. $\neg A \rightarrow \neg B$ Př1
2. B Př2
3. $\neg A$ NZ

Příklad (Kontrapozice, K)

$(\neg A \rightarrow \neg B) \ \vdash \ (B \rightarrow A)$

VD: $(\neg A \rightarrow \neg B), B \ \vdash \ A$

1.	$\neg A \rightarrow \neg B$	Př1
2.	B	Př2
3.	$\neg A$	NZ
4.	$\neg B$	EI(1,3), spor s 2.

Příklad

$\neg\neg A \ \vdash \ A$

1. $\neg\neg A$ Př1

Příklad

$\neg\neg A \;\vdash\; A$

1. $\neg\neg A$ Př1

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg M, M \;\vdash\; P \\ \neg\neg A, \neg A \;\vdash\; \neg\neg\neg\neg A \\ \neg\neg A \;\vdash\; \neg A \to \neg\neg\neg\neg A \\ \vdash\; \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg\neg A) \end{array}}$$

Příklad

$\neg\neg A \ \vdash \ A$

1. $\neg\neg A$ Př1

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg M, M \ \vdash \ P \\ \neg\neg A, \neg A \ \vdash \ \neg\neg\neg A \\ \neg\neg A \ \vdash \ \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \\ \vdash \ \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \end{array}}$$

2. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$ VD na SM

Příklad

$\neg\neg A \ \vdash \ A$

1. $\neg\neg A$ Př1

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg M, M \ \vdash \ P \\ \neg\neg A, \neg A \ \vdash \ \neg\neg\neg A \\ \neg\neg A \ \vdash \ \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \\ \vdash \ \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \end{array}}$$

2. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$ VD na SM
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ EI(1,2)

Příklad

$\neg\neg A \;\vdash\; A$

1. $\neg\neg A$ — Př1

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg M, M \;\vdash\; P \\ \neg\neg A, \neg A \;\vdash\; \neg\neg\neg\neg A \\ \neg\neg A \;\vdash\; \neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \\ \vdash\; \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \end{array}}$$

2. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A)$ — VD na SM
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ — EI(1,2)
4. $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ — VD na K

Příklad

$\neg\neg A \ \vdash \ A$

1. $\neg\neg A$ Př1

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg M, M \ \vdash \ P \\ \neg\neg A, \neg A \ \vdash \ \neg\neg\neg A \\ \neg\neg A \ \vdash \ \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \\ \vdash \ \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \end{array}}$$

2. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$ VD na SM
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ EI(1,2)
4. $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ VD na K
5. $\neg\neg A \rightarrow A$ EI(3,4)

Příklad (Eliminace negace, EN)

$\neg\neg A \;\vdash\; A$

1. $\neg\neg A$ Př1

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg M, M \;\vdash\; P \\ \neg\neg A, \neg A \;\vdash\; \neg\neg\neg A \\ \neg\neg A \;\vdash\; \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \\ \vdash\; \neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \end{array}}$$

2. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$ VD na SM
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ EI(1,2)
4. $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ VD na K
5. $\neg\neg A \rightarrow A$ EI(3,4)
6. A EI(1,5)

Příklad

$A \vdash \neg\neg A$

1. A Př1
2. $\neg(\neg\neg A)$ NZ

Příklad (Zavedení negace, ZN)

$A \ \vdash \ \neg\neg A$

1.	A	Př1
2.	$\neg(\neg\neg A)$	NZ
3.	$\neg A$	EN(2), spor s 1

Poznámka

Podle věty o substituci:

$\vdash \ \neg\neg A \to A$ a zároveň $\vdash \ A \to \neg\neg A$

$\Longrightarrow$ jde o ekvivalenci formulí $\neg\neg A$ a A

$\Longrightarrow$ podformuli ve formě $\neg\neg A$ lze volně zaměnit za podformuli A a naopak