Systém přirozené dedukce výrokové logiky

Hypotézy

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky
Filozoficko-Přírodovědecká fakulta
Slezské univerzity, Opava

Hypotézy

- přímá hypotéza,

Hypotézy

- přímá hypotéza,
- nepřímá hypotéza,

Hypotézy

- přímá hypotéza,
- nepřímá hypotéza,
- přímý větvený důkaz s hypotézami,

Hypotézy

- přímá hypotéza,
- nepřímá hypotéza,
- přímý větvený důkaz s hypotézami,
- nepřímý větvený důkaz s hypotézami.

Přímá hypotéza

- vyslovíme hypotézu H,

Přímá hypotéza

- vyslovíme hypotézu H,
- za předpokladu platnosti hypotézy odvodíme závěr D,

Přímá hypotéza

- vyslovíme hypotézu H,
- za předpokladu platnosti hypotézy odvodíme závěr D,
- do řádného důkazu přidáme větu $H \rightarrow D$.

Přímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $(p \, \& q \rightarrow r) \, \& q \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

Přímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $(p \,\& q \rightarrow r) \,\& q \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

1.	$(p \,\& q \rightarrow r) \,\& q$	Př1
2.	$p \,\& q \rightarrow r$	EK(1)
3.	q	EK(1)

Přímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $(p \,\&q \rightarrow r) \,\&q \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

1.	$(p \,\&q \rightarrow r) \,\&q$	Př1
2.	$p \,\&q \rightarrow r$	EK(1)
3.	q	EK(1)
(a)	p	H1
(b)	$p \,\&q$	ZK(3,a)
(c)	r	EI(2,b)

Přímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $(p \,\&q \rightarrow r) \,\&q \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

1. $(p \,\&q \rightarrow r) \,\&q$ Př1
2. $p \,\&q \rightarrow r$ EK(1)
3. q EK(1)
   - (a) p H1
   - (b) $p \,\&q$ ZK(3,a)
   - (c) r EI(2,b)
4. $p \rightarrow r$ (a $\rightarrow$ c)

Přímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $(p \,\&q \rightarrow r) \,\&q \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

1.	$(p \,\&q \rightarrow r) \,\&q$	Př1
2.	$p \,\&q \rightarrow r$	EK(1)
3.	q	EK(1)
(a)	p	H1
(b)	$p \,\&q$	ZK(3,a)
(c)	r	EI(2,b)
4.	$p \rightarrow r$	(a $\rightarrow$ c)
5.	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	ZD(4)

Nepřímá hypotéza

- vyslovíme hypotézu H,

Nepřímá hypotéza

- vyslovíme hypotézu H,
- za předpokladu platnosti hypotézy odvozujeme tak dlouho, dokud nedojdeme ke sporu ($false$),

Nepřímá hypotéza

- vyslovíme hypotézu H,
- za předpokladu platnosti hypotézy odvozujeme tak dlouho, dokud nedojdeme ke sporu ($false$),
- do řádného důkazu přidáme větu $\neg H$.

Nepřímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \, \& \neg q)$

Nepřímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \,\&\neg q)$

1. $\neg(p \vee q)$ Př1

Nepřímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \,\&\neg q)$

1. $\neg(p \vee q)$ Př1
   (a) p H1
   (b) $p \vee q$ ZD(a), spor s 1
2. $\neg p$ $\neg$ H1

Nepřímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \,\&\neg q)$

1.	$\neg(p \vee q)$	Př1
(a)	p	H1
(b)	$p \vee q$	ZD(a), spor s 1
2.	$\neg p$	$\neg$ H1
(a)	q	H2
(b)	$p \vee q$	ZD(a), spor s 1
3.	$\neg q$	$\neg$ H2

Nepřímá hypotéza – příklad

Dokažte platnost věty $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \,\&\neg q)$

1. $\neg(p \vee q)$ Př1
   (a) p H1
   (b) $p \vee q$ ZD(a), spor s 1
2. $\neg p$ $\neg$ H1
   (a) q H2
   (b) $p \vee q$ ZD(a), spor s 1
3. $\neg q$ $\neg$ H2
4. $\neg p \,\&\neg q$ ZK(2,3)

Přímý větvený důkaz

- v důkazu najdeme větu, která je disjunkcí svých podformulí $H1 \lor H2 \lor \ldots Hn$,

Přímý větvený důkaz

- v důkazu najdeme větu, která je disjunkcí svých podformulí $H1 \vee H2 \vee \ldots Hn$,
- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D,
- za předpokladu hypotézy $H2$ odvodíme závěr D,
- $\ldots$,
- za předpokladu hypotézy Hn odvodíme závěr D,

Přímý větvený důkaz

- v důkazu najdeme větu, která je disjunkcí svých podformulí $H1 \vee H2 \vee \ldots Hn$,
- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D,
- za předpokladu hypotézy $H2$ odvodíme závěr D,
- $\ldots$,
- za předpokladu hypotézy Hn odvodíme závěr D,
- do řádného důkazu přidáme větu D.

Přímý větvený důkaz – příklad

Dokažte platnost věty $((p \mathbin{\&} q) \lor (p \mathbin{\&} r)) \;\rightarrow\; (p \mathbin{\&} (q \lor r))$

Přímý větvený důkaz – příklad

Dokažte platnost věty $((p \,\& q) \vee (p \,\& r)) \;\rightarrow\; (p \,\&\, (q \vee r))$

1. $(p \,\& q) \vee (p \,\& r)$ Př1

Přímý větvený důkaz – příklad

Dokažte platnost věty $((p \,\& q) \vee (p \,\& r)) \;\rightarrow\; (p \,\&\, (q \vee r))$

1. $(p \,\& q) \vee (p \,\& r)$ Př1
   (a) $p \,\& q$ H1
   (b) p EK(a)
   (c) q EK(a)
   (d) $q \vee r$ ZD(c)
   (e) $p \,\&\, (q \vee r)$ ZK(b,d)

Přímý větvený důkaz – příklad

Dokažte platnost věty $((p \,\& q) \vee (p \,\& r)) \rightarrow (p \,\& (q \vee r))$

1. $(p \,\& q) \vee (p \,\& r)$ Př1

(a)	$p \,\& q$	H1	(a)	$p \,\& r$	H2
(b)	p	EK(a)	(b)	p	EK(a)
(c)	q	EK(a)	(c)	r	EK(a)
(d)	$q \vee r$	ZD(c)	(d)	$q \vee r$	ZD(c)
(e)	$p \,\& (q \vee r)$	ZK(b,d)	(e)	$p \,\& (q \vee r)$	ZK(b,d)

Přímý větvený důkaz – příklad

Dokažte platnost věty $((p \mathbin{\&} q) \vee (p \mathbin{\&} r)) \;\rightarrow\; (p \mathbin{\&} (q \vee r))$

1. $(p \mathbin{\&} q) \vee (p \mathbin{\&} r)$ Př1

(a)	$p \mathbin{\&} q$	H1	(a)	$p \mathbin{\&} r$	H2
(b)	p	EK(a)	(b)	p	EK(a)
(c)	q	EK(a)	(c)	r	EK(a)
(d)	$q \vee r$	ZD(c)	(d)	$q \vee r$	ZD(c)
(e)	$p \mathbin{\&} (q \vee r)$	ZK(b,d)	(e)	$p \mathbin{\&} (q \vee r)$	ZK(b,d)

2. $p \mathbin{\&} (q \vee r)$

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

Z platnosti formule

$$B_1 \lor B_2 \lor \ldots \lor B_m$$

a formulí

$$B_1 \to A,\ B_2 \to A, \ldots, B_m \to A$$

plyne platnost formule A.

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

Z platnosti formule

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$$

a formulí

$$B_1 \rightarrow A,\ B_2 \rightarrow A, \ldots, B_m \rightarrow A$$

plyne platnost formule A.

Větu dokážeme pro $m = 2$, a to nepřímým důkazem (předpoklady $B_1 \rightarrow A$ a $B_2 \rightarrow A$ byly získány uplatněním přímé hypotézy).

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H1 \rightarrow D$

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H1 \rightarrow D$
- za předpokladu hypotézy $H2$ ($\ldots$ Hn) odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H2 \rightarrow D$ ($\ldots Hn \rightarrow D$)

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H1 \rightarrow D$
- za předpokladu hypotézy $H2$ ($\ldots$ Hn) odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H2 \rightarrow D$ ($\ldots Hn \rightarrow D$)
- když platí disjunkce $H1 \vee H2 \vee \ldots Hn$ (je součástí důkazu), pak alespoň jeden z disjunktů musí platit,

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H1 \rightarrow D$
- za předpokladu hypotézy $H2$ (... Hn) odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H2 \rightarrow D$ (... $Hn \rightarrow D$)
- když platí disjunkce $H1 \vee H2 \vee \ldots Hn$ (je součástí důkazu), pak alespoň jeden z disjunktů musí platit,
- pokud platí $H1$, můžeme na $H1$ a $H1 \rightarrow D$ použít EI,
- pokud platí $H2$, můžeme na $H2$ a $H2 \rightarrow D$ použít EI,
- ...

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

- za předpokladu hypotézy $H1$ odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H1 \rightarrow D$
- za předpokladu hypotézy $H2$ (… Hn) odvodíme závěr D
  $\Rightarrow$ do důkazu patří $H2 \rightarrow D$ (… $Hn \rightarrow D$)
- když platí disjunkce $H1 \vee H2 \vee \ldots Hn$ (je součástí důkazu), pak alespoň jeden z disjunktů musí platit,
- pokud platí $H1$, můžeme na $H1$ a $H1 \rightarrow D$ použít EI,
- pokud platí $H2$, můžeme na $H2$ a $H2 \rightarrow D$ použít EI,
- …
- alespoň jednu z těchto možností můžeme využít, proto lze do řádného důkazu přidat větu D.

Přímý větvený důkaz – důkaz postupu

1.	$B_1 \vee B_2$	Př1
2.	$B_1 \to A$	Př2
3.	$B_2 \to A$	Př3
4.	$\neg A \to \neg B_1$	T(2)
5.	$\neg A \to \neg B_2$	T(3)
6.	$\neg A$	NZ (negace závěru)
7.	$\neg B_1$	EI(4,6)
8.	$\neg B_2$	EI(5,6)
9.	B_2	ED(1,7), spor s 8

Nepřímý větvený důkaz

- v posloupnosti *nepřímého* důkazu se nachází formule ve tvaru $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$,

Nepřímý větvený důkaz

- v posloupnosti *nepřímého* důkazu se nachází formule ve tvaru $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$,
- všechny podformule $B_i,\ 1 \leq i \leq m$ použijeme jako hypotézy,

Nepřímý větvený důkaz

- v posloupnosti *nepřímého* důkazu se nachází formule ve tvaru $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$,
- všechny podformule B_i, $1 \leq i \leq m$ použijeme jako hypotézy,
- ze všech těchto hypotéz B_i docházíme ke sporu s některým členem hlavní posloupnosti důkazu (tedy všechny B_i jsou vyvráceny),

Nepřímý větvený důkaz

- v posloupnosti *nepřímého* důkazu se nachází formule ve tvaru $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$,
- všechny podformule $B_i,\ 1 \leq i \leq m$ použijeme jako hypotézy,
- ze všech těchto hypotéz B_i docházíme ke sporu s některým členem hlavní posloupnosti důkazu (tedy všechny B_i jsou vyvráceny),
- pak jsme dospěli ke sporu i v hlavní posloupnosti důkazu a původní formule je dokázána.

Nepřímý větvený důkaz

- v posloupnosti *nepřímého* důkazu se nachází formule ve tvaru $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$,
- všechny podformule B_i, $1 \leq i \leq m$ použijeme jako hypotézy,
- ze všech těchto hypotéz B_i docházíme ke sporu s některým členem hlavní posloupnosti důkazu (tedy všechny B_i jsou vyvráceny),
- pak jsme dospěli ke sporu i v hlavní posloupnosti důkazu a původní formule je dokázána.

Formule $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$ často bývá negací závěru.

Nepřímý větvený důkaz

- v posloupnosti *nepřímého* důkazu se nachází formule ve tvaru $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$,
- všechny podformule $B_i,\ 1 \leq i \leq m$ použijeme jako hypotézy,
- ze všech těchto hypotéz B_i docházíme ke sporu s některým členem hlavní posloupnosti důkazu (tedy všechny B_i jsou vyvráceny),
- pak jsme dospěli ke sporu i v hlavní posloupnosti důkazu a původní formule je dokázána.

Popřením všech větví důkazu přidáváme k hlavní posloupnosti důkazu formuli, která je ve sporu s některým předchozím členem posloupnosti.

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte $((p \rightarrow q)\ \&\, (r \rightarrow s)\ \& \neg\, (q \vee s)) \ \rightarrow\ \neg\, (p \vee r)$

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte $((p \rightarrow q)\ \&(r \rightarrow s)\ \&\neg(q \vee s)) \ \rightarrow\ \neg(p \vee r)$

1. $(p \rightarrow q)\ \&(r \rightarrow s)\ \&\neg(q \vee s)$ Př1
2. $p \rightarrow q$ EK(1)
3. $r \rightarrow s$ EK(1)
4. $\neg(q \vee s)$ EK(1)
5. $p \vee r$ NZ = H1 $\vee$ H2

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte $((p \rightarrow q)\ \&\ (r \rightarrow s)\ \& \neg (q \vee s)) \rightarrow \neg (p \vee r)$

1. $(p \rightarrow q)\ \&\ (r \rightarrow s)\ \& \neg (q \vee s)$ Př1
2. $p \rightarrow q$ EK(1)
3. $r \rightarrow s$ EK(1)
4. $\neg (q \vee s)$ EK(1)
5. $p \vee r$ NZ = H1 ∨ H2

(a)	p	H1	(a)	r	H2
(b)	q	EI(2,a)	(b)	s	EI(3,a)
(c)	$q \vee s$	ZD(b), spor s 4	(c)	$q \vee s$	ZD(b), spor s 4

$\Rightarrow$ spor s 4

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte, že platí $A \vee B, \neg B \vee C \ \vdash \ A \vee C$ (pravidlo rezoluce)

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte, že platí $A \vee B, \neg B \vee C \quad \vdash \quad A \vee C$ (pravidlo rezoluce)

1.	$A \vee B$	Př1
2.	$\neg B \vee C$	Př2
3.	$B \vee \neg B$	Axiom

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte, že platí $A \vee B, \neg B \vee C \;\vdash\; A \vee C$ (pravidlo rezoluce)

1. $A \vee B$ Př1
2. $\neg B \vee C$ Př2
3. $B \vee \neg B$ Axiom

(a) B	H1	(a) $\neg B$	H2
(b) C	ED(2,a)	(b) A	ED(1,a)
(c) $A \vee C$	ZD(b)	(c) $A \vee C$	ZD(b)

Nepřímý větvený důkaz – příklad

Dokažte, že platí $A \vee B, \neg B \vee C \ \vdash \ A \vee C$ (pravidlo rezoluce)

1.	$A \vee B$	Př1
2.	$\neg B \vee C$	Př2
3.	$B \vee \neg B$	Axiom

(a)	B	H1	(a)	$\neg B$	H2
(b)	C	ED(2,a)	(b)	A	ED(1,a)
(c)	$A \vee C$	ZD(b)	(c)	$A \vee C$	ZD(b)

4. $A \vee C$