Systém přirozené dedukce predikátové logiky

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky
Filozoficko-Přírodovědecká fakulta
Slezské univerzity, Opava

Systém přirozené dedukce PL

- Jazyk: přejímá jazyk predikátové logiky prvního řádu (PL_1).
- Dedukční pravidla: viz dále.

Dedukční pravidla

1.-10.	Dedukční pravidla přejatá ze Systému přirozené dedukce VL	
11.	$A(x) \vdash \forall x A(x)$	Z$\forall$ Zavedení obecného kvantifikátoru
12.	$\forall x A(x) \vdash A(x/t)$	E$\forall$ Eliminace obecného kvantifikátoru
13.	$A(x/t) \vdash \exists x A(x)$	Z$\exists$ Zavedení existenčního kvantifikátoru
14.	$\exists x A(x) \vdash A(c)$	E$\exists$ Eliminace existenčního kvantifikátoru

Dedukční pravidla

Narozdíl od pravidel pro výrokovou logiku tato pravidla mají svá *omezení*:

1. Pro pravidla E∀ ($\forall x A(x) \vdash A(x/t)$) a Z∃ ($A(x/t) \vdash \exists x A(x)$):

   term t musí být substituovatelný za x.

Dedukční pravidla

Narozdíl od pravidel pro výrokovou logiku tato pravidla mají svá *omezení*:

2. Pro pravidlo E$\exists$ ($\exists x A(x) \vdash A(c)$):

   c je individuová konstanta, která v posloupnosti důkazu dosud ještě nebyla použita.

Dedukční pravidla

Narozdíl od pravidel pro výrokovou logiku tato pravidla mají svá *omezení*:

3. Pro pravidlo E$\exists$ ($\exists x A(x) \vdash A(c)$):

   jestliže A obsahuje volné proměnné $y_1, \ldots, y_n$, pak má pravidlo formu

   $$\exists x A(x, y_1, \ldots, y_n) \vdash A(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n),$$

   tedy volné proměnné ponecháme a místo vázané proměnné dosadíme funkční symbol o n proměnných, který v posloupnosti důkazu dosud nebyl použit. To odpovídá procesu skolemizace.

Příklad 1

Dokažte větu
$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$

Příklad 1

Dokažte větu
$\forall x\,(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \forall x B(x))$

1. $\forall x\,(A(x) \to B(x))$	Př1	
2. $\forall x A(x)$	Př2	
3. $A(x) \to B(x)$	E$\forall$(1)	
4. $A(x)$	E$\forall$(2)	
5. $B(x)$	EI(3,4)	
6. $\forall x B(x)$	Z$\forall$(5)	x je substituovatelný za x

Příklad 2

Dokažte větu $\neg\forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$

Příklad 2

Dokažte větu $\neg\forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$

1.	$\neg\forall x A(x)$	Př1
2.	$\neg\exists x \neg A(x)$	NZ
(a)	$\neg A(x)$	H1
(b)	$\exists x \neg A(x)$	Z$\exists$(a)
3.	$\neg A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$	(a $\rightarrow$ b)
4.	$\neg\exists x \neg A(x) \rightarrow A(x)$	T(3)
5.	$A(x)$	EI(2,4)
6.	$\forall x A(x)$	Z$\forall$(5), spor s 1.

Příklad 3

Dokažte větu $\exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x)$

Příklad 3

Dokažte větu $\exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x)$

1.	$\exists x \neg A(x)$	Př1
2.	$\forall x A(x)$	NZ
3.	$\neg A(c)$	E$\exists$(1)
4.	$A(c)$	E$\forall$(2), spor s 3.

Korektnost

Věta 1 (Věta o korektnosti SPD PL) *Každá formule dokazatelná v Systému přirozené dedukce predikátové logiky je logicky platná, tedy pro každou formuli A predikátové logiky platí:*

$$\vdash A \quad\Longrightarrow\quad \models A$$

Korektnost

Důkaz:

- dokázat korektnost dedukčních pravidel, důkaz korektnosti prvních 10 přejmeme (výroková logika),

Korektnost

Důkaz:

- dokázat korektnost dedukčních pravidel, důkaz korektnosti prvních 10 přejmeme (výroková logika),
- dokázat korektnost konstrukce důkazu, můžeme celý přejmout.

Korektnost

Pravidlo č. 11, $A(x) \vdash \forall x A(x)$ ***(Z∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

Korektnost

Pravidlo č. 11, $A(x) \vdash \forall x A(x)$ ***(Z∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- ✓ předpokládejme, že $\models A(x)[\mathcal{S}]$ (tj. při jakékoliv valuaci)

Korektnost

Pravidlo č. 11, $A(x) \vdash \forall x A(x)$ *(Z∀):*

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models A(x)[\mathcal{S}]$ (tj. při jakékoliv valuaci)
- $\Rightarrow$ A je logicky platná pro jakékoliv ohodnocení a interpretaci

Korektnost

Pravidlo č. 11, $A(x) \vdash \forall x A(x)$ ***(Z∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models A(x)[\mathcal{S}]$ (tj. při jakékoliv valuaci)
- $\Rightarrow$ A je logicky platná pro jakékoliv ohodnocení a interpretaci
- zapisujeme $I(\forall x A[\mathcal{S}, e(x/a)] = true$ pro kterýkoliv prvek univerza diskurzu a

Korektnost

Pravidlo č. 11, $A(x) \vdash \forall x A(x)$ ***(Z∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models A(x)[\mathcal{S}]$ (tj. při jakékoliv valuaci)
- $\Rightarrow$ A je logicky platná pro jakékoliv ohodnocení a interpretaci
- zapisujeme $I(\forall x A[\mathcal{S}, e(x/a)] = true$ pro kterýkoliv prvek univerza diskurzu a
- $\Rightarrow \models \forall x A(x)[\mathcal{S}]$

Korektnost

Pravidlo č. 12, $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ ***(E∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

Korektnost

Pravidlo č. 12, $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ ***(E$\forall$):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \ \forall x A(x)[\mathcal{S}]$

Korektnost

Pravidlo č. 12, $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ ***(E∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \forall x A(x)[\mathcal{S}]$
- $\Rightarrow$ po dosazení jakéhokoliv prvku univerza za x dostaneme vždy formuli interpretovanou jako *true*

Korektnost

Pravidlo č. 12, $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ ***(E***$\forall$***):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \forall x A(x)[\mathcal{S}]$
- $\Rightarrow$ po dosazení jakéhokoliv prvku univerza za x dostaneme vždy formuli interpretovanou jako *true*
- $\Rightarrow$ když za x dosadíme term t, který je substituovatelný za x, je také $A(x/t)$ interpretována s výsledkem *true*

Korektnost

Pravidlo č. 12, $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ ***(E∀):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \forall x A(x)[\mathcal{S}]$
- $\Rightarrow$ po dosazení jakéhokoliv prvku univerza za x dostaneme vždy formuli interpretovanou jako *true*
- $\Rightarrow$ když za x dosadíme term t, který je substituovatelný za x, je také $A(x/t)$ interpretována s výsledkem *true*
- $\Rightarrow \ \models A(t)[\mathcal{S}]$

Korektnost

Pravidlo č. 13, $A(x/t) \vdash \exists x A(x)$ ***(Z∃):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

Korektnost

Pravidlo č. 13, $A(x/t) \vdash \exists x A(x)$ ***(Z∃):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- ✓ předpokládejme, že $\models A(x/t)[\mathcal{S}]$

Korektnost

Pravidlo č. 13, $A(x/t) \vdash \exists x A(x)$ ***(Z∃):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models A(x/t)[\mathcal{S}]$
- $\Rightarrow$ po dosazení t za x je formule A interpretována vždy s výsledkem *true*

Korektnost

Pravidlo č. 13, $A(x/t) \vdash \exists x A(x)$ ***(Z∃):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models A(x/t)[\mathcal{S}]$
- $\Rightarrow$ po dosazení t za x je formule A interpretována vždy s výsledkem *true*
- je takto interpretována alespoň jednou pro některou strukturu a valuaci

Korektnost

Pravidlo č. 13, $A(x/t) \ \vdash \ \exists x A(x)$ ***(Z∃):***

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \ A(x/t)[\mathcal{S}]$
- $\Rightarrow$ po dosazení t za x je formule A interpretována vždy s výsledkem *true*
- je takto interpretována alespoň jednou pro některou strukturu a valuaci
- $\Rightarrow \ \models \ \exists x A(x)[\mathcal{S}]$

Korektnost

Pravidlo č. 14, $\exists x A(x) \ \vdash \ A(c)$ (E$\exists$):

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

Korektnost

Pravidlo č. 14, $\exists x A(x) \ \vdash \ A(c)$ (E$\exists$):

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \exists x A(x)[\mathcal{S}]$

Korektnost

Pravidlo č. 14, $\exists x A(x) \vdash A(c)$ (E$\exists$):

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \exists x A(x)[\mathcal{S}]$
- existuje prvek univerza, který můžeme dosadit za x a formule A je pak ve struktuře $\mathcal{S}$ interpretována jako *true*

Korektnost

Pravidlo č. 14, $\exists x A(x) \ \vdash \ A(c)$ (E$\exists$):

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- předpokládejme, že $\models \ \exists x A(x)[\mathcal{S}]$
- existuje prvek univerza, který můžeme dosadit za x a formule A je pak ve struktuře $\mathcal{S}$ interpretována jako *true*
- $\Rightarrow$ tento prvek můžeme „nějak nazvat“, musíme však zvolit název, který jsme dosud nepoužili („alias“, třeba c)

Korektnost

Pravidlo č. 14, $\exists x A(x) \vdash A(c)$ (E$\exists$):

Logickou úvahou ve struktuře $\mathcal{S}$

- ✓ předpokládejme, že $\models \exists x A(x)[\mathcal{S}]$
- ✓ existuje prvek univerza, který můžeme dosadit za x a formule A je pak ve struktuře $\mathcal{S}$ interpretována jako *true*
- ✓ $\Rightarrow$ tento prvek můžeme „nějak nazvat“, musíme však zvolit název, který jsme dosud nepoužili („alias“, třeba c)
- ✓ $\Rightarrow \models A(c)[\mathcal{S}]$

Úplnost

Věta 2 (Věta o úplnosti SPD PL) *Každá logicky platná formule predikátové logiky je dokazatelná v Systému přirozené dedukce predikátové logiky, tedy platí*

$$\models A \quad \Longrightarrow \quad \vdash A$$

Důkaz:

- v druhém lemmatu u důkazu úplnosti SPD VL rozšíříme postup o přidání kvantifikátorů,
- zbytek lemmatu přejmeme,
- důkaz úplnosti přejmeme.