Hilbertovský axiomatický systém *výrokové logiky*

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky
Filozoficko-Přírodovědecká fakulta
Slezské univerzity, Opava

Hilbertovský systém

- jazyk: přejímáme jazyk výrokové logiky s omezením na logické spojky $\neg$ a $\rightarrow$, budeme značit $L_{\mathcal{H}}$

Hilbertovský systém

- jazyk: přejímáme jazyk výrokové logiky s omezením na logické spojky $\neg$ a $\rightarrow$, budeme značit $L_{\mathcal{H}}$
- axiomy:

$\vdash \ A \rightarrow (B \rightarrow A)$	A1
$\vdash \ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	A2
$\vdash \ (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	A3

Hilbertovský systém

- jazyk: přejímáme jazyk výrokové logiky s omezením na logické spojky $\neg$ a $\rightarrow$, budeme značit $L_{\mathcal{H}}$
- axiomy:

$\vdash\ A \rightarrow (B \rightarrow A)$	A1
$\vdash\ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	A2
$\vdash\ (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	A3

- odvozovací pravidlo: *Modus Ponens*

$$A \rightarrow B,\ A \quad \vdash \quad B$$

Hilbertovský systém

- jazyk: přejímáme jazyk výrokové logiky s omezením na logické spojky $\neg$ a $\rightarrow$, budeme značit $L_{\mathcal{H}}$

- axiomy:

$\vdash \; A \rightarrow (B \rightarrow A)$	A1
$\vdash \; (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	A2
$\vdash \; (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	A3

- odvozovací pravidlo: *Modus Ponens*

$$A \rightarrow B, \; A \quad \vdash \quad B$$

Předpokládáme taktéž platnost Věty o substituci a Rozšířené věty o substituci.

Definice důkazu v HAS VL

Definice 1 *Důkaz formule F z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ je konečná posloupnost formulí $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jazyka $L_{\mathcal{H}}$, kde $F = A_m$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí pro A_i některá z těchto možností:*

- *$A_i \in \{P_1, \ldots, P_n\}$ (tj. je to některý z předpokladů),*
- *A_i je logický axiom,*
- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla Modus Ponens na některé dva předchozí členy posloupnosti.*

Věta o implikaci (VI)

Dokažte platnost věty $P \rightarrow P$ (*věta o implikaci*), značíme VI.

Věta o implikaci (VI)

Dokažte platnost věty $P \to P$ (*věta o implikaci*), značíme VI.

1. $P \to ((P \to P) \to P))$ A1 $[A = P,$
$B = P \to P]$

Věta o implikaci (VI)

Dokažte platnost věty $P \to P$ (*věta o implikaci*), značíme VI.

1. $P \to ((P \to P) \to P))$ A1 $[A = P, B = P \to P]$
2. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$ A2 $[A = P, B = P \to P, C = P]$

Věta o implikaci (VI)

Dokažte platnost věty $P \to P$ (*věta o implikaci*), značíme VI.

1. $P \to ((P \to P) \to P))$ A1 $[A = P, B = P \to P]$
2. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$ A2 $[A = P, B = P \to P, C = P]$
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ MP(1,2)

Věta o implikaci (VI)

Dokažte platnost věty $P \to P$ (*věta o implikaci*), značíme VI.

1. $P \to ((P \to P) \to P))$ A1 $[A = P,$
   $B = P \to P]$
2. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$
   A2 $[A = P,$
   $B = P \to P,$
   $C = P]$
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ MP(1,2)
4. $P \to (P \to P))$ A1 $[A = P,$
   $B = P]$

Věta o implikaci (VI)

Dokažte platnost věty $P \to P$ (*věta o implikaci*), značíme VI.

1. $P \to ((P \to P) \to P))$ A1 $[A = P, B = P \to P]$
2. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$ A2 $[A = P, B = P \to P, C = P]$
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ MP(1,2)
4. $P \to (P \to P))$ A1 $[A = P, B = P]$
5. $P \to P$ MP(3,4)

Věta o dedukci (VD)

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z \quad \Leftrightarrow \quad P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \to Z$$

Věta o dedukci (VD)

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že platí $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \rightarrow Z$.
Pak musí v HAS VL existovat tato posloupnost důkazu:

$1.$ A_1

$\ldots$

$m-2.$ A_{m-2}

$m-1.$ A_{m-1}

$m.$ $P_n \rightarrow Z$

Věta o dedukci (VD)

„⇐“ Předpokládejme, že platí $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \to Z$.
Pak musí v HAS VL existovat tato posloupnost důkazu:

1.	A_1	
…		
$m-2$.	A_{m-2}	
$m-1$.	A_{m-1}	
m.	$P_n \to Z$	
	Rozšíříme důkaz:	
$m+1$.	P_n	předpoklad
$m+2$.	Z	MP(m,$m+1$)

Věta o dedukci (VD)

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že platí $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \to Z$.
Pak musí v HAS VL existovat tato posloupnost důkazu:

1.	A_1	
$\ldots$		
$m-2$.	A_{m-2}	
$m-1$.	A_{m-1}	
m.	$P_n \to Z$	
	Rozšíříme důkaz:	
$m+1$.	P_n	předpoklad
$m+2$.	Z	MP(m,$m+1$)

$\Longrightarrow$ dokázali jsme $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \;\vdash\; Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

Dokážeme indukcí, že P_n podmiňuje každého člena důkazu: $P_n \rightarrow A_i, \;\; 1 \leq i \leq m$ (důležité je m)

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

Báze indukce: A_1 je buď logický axiom nebo $P_i,\ 1 \leq i \leq n$

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \ \vdash \ Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

Báze indukce: A_1 je buď logický axiom nebo $P_i,\ 1 \leq i \leq n$

1. A_1 axiom nebo předpoklad
2. $A_1 \rightarrow (P_n \rightarrow A_1)$ A1
3. $P_n \rightarrow A_1$ MP(1,2)

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \;\vdash\; Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

Předpoklad indukce: Nechť věta platí pro všechny členy posloupnosti až po k-tý člen, tedy všechny členy posloupnosti až ke k-tému mohou být podmíněny formulí P_n.

Věta o dedukci (VD)

„$\Rightarrow$" Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

Krok indukce: Formule A_{k+1} je buď logickým axiomem, nebo některý předpoklad (obojí řešeno v *bázi*), nebo vznikla uplatněním pravidla *Modus Ponens* na některé dva předchozí členy posloupnosti:
Nechť tedy formule A_{k+1} vznikla uplatněním MP na některé dva předchozí členy posloupnosti A_i a A_j, $i \neq j$, kde $A_j = (A_i \rightarrow A_{k+1})$. Protože $i, j \leq k$, je věta již dokázána pro formule A_i a A_j:

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

1. $P_n \to A_i$ Př1
2. $P_n \to (A_i \to A_{k+1})$ Př2
3. $(P_n \to (A_i \to A_{k+1})) \to ((P_n \to A_i) \to (P_n \to A_{k+1}))$ A2
4. $(P_n \to A_i) \to (P_n \to A_{k+1})$ MP(2,3)
5. $P_n \to A_{k+1}$ MP(1,4)

Věta o dedukci (VD)

„⇒“ Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \quad \text{kde} \quad Z = A_m$$

1. $P_n \to A_i$ Př1
2. $P_n \to (A_i \to A_{k+1})$ Př2
3. $(P_n \to (A_i \to A_{k+1})) \to ((P_n \to A_i) \to (P_n \to A_{k+1}))$ A2
4. $(P_n \to A_i) \to (P_n \to A_{k+1})$ MP(2,3)
5. $P_n \to A_{k+1}$ MP(1,4)

$\Longrightarrow$ dokázali jsme $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \to Z$

Pomocné pravidlo oslabení (PO)

Dokažte platnost vztahu $B \;\vdash\; A \to B$

Pomocné pravidlo oslabení (PO)

Dokažte platnost vztahu $B \vdash A \rightarrow B$

1.	B	Př1
2.	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	A1
3.	$A \rightarrow B$	MP(2,4)

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \ \vdash \ A \rightarrow C$

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \ \vdash\ A \rightarrow C$

1. $A \rightarrow B$ Př1
2. $B \rightarrow C$ Př2
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ A1 $[A = (B \rightarrow C),$ $B = A]$

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ A1 $[A = (B \to C),$ $B = A]$
4. $A \to (B \to C)$ MP(2,3)

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$

1.	$A \to B$	Př1
2.	$B \to C$	Př2
3.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	A1 $[A = (B \to C),$ $B = A]$
4.	$A \to (B \to C)$	MP(2,3)
5.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	A2

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash \ A \to C$

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ A1 $[A = (B \to C),$ $B = A]$
4. $A \to (B \to C)$ MP(2,3)
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ A2
6. $(A \to B) \to (A \to C)$ MP(4,5)

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ A1 $[A = (B \to C),\ B = A]$
4. $A \to (B \to C)$ MP(2,3)
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ A2
6. $(A \to B) \to (A \to C)$ MP(4,5)
7. $A \to C$ MP(1,6)

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$ pomocí věty o dedukci.

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$ pomocí věty o dedukci.

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$ pomocí věty o dedukci.

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2
3. A VD na závěr $A \to C$, Př3

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C\ \vdash\ A \rightarrow C$ pomocí věty o dedukci.

1. $A \rightarrow B$ Př1
2. $B \rightarrow C$ Př2
3. A VD na závěr $A \rightarrow C$, Př3
4. B MP(1,3)

Prav. tranzitivity implikace (TI)

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$ pomocí věty o dedukci.

1.	$A \to B$	Př1
2.	$B \to C$	Př2
3.	A	VD na závěr $A \to C$, Př3
4.	B	MP(1,3)
5.	C	MP(2,4)

Pom. pravidlo kontrapozice (K)

Dokažte platnost vztahu $\neg A \to \neg B \ \vdash\ B \to A$

Pom. pravidlo kontrapozice (K)

Dokažte platnost vztahu $\neg A \to \neg B \ \vdash \ B \to A$

Vezmeme axiom A3:

$$\vdash \ (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$

Pom. pravidlo kontrapozice (K)

Dokažte platnost vztahu $\neg A \to \neg B \ \vdash \ B \to A$

Vezmeme axiom A3:

$$\vdash \ (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$

Uplatníme větu o dedukci (VD):

$$\neg A \to \neg B \ \vdash \ B \to A$$

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \quad \vdash \quad P$.

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \;\vdash\; P$.

1. $\neg\neg P$ Př1

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \ \vdash \ P$.

1. $\neg\neg P$ Př1
2. $\neg\neg P \rightarrow (\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P)$ A1 $[A = \neg\neg P$, $B = \neg\neg\neg\neg P]$

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \;\vdash\; P$.

1. $\neg\neg P$ — Př1
2. $\neg\neg P \rightarrow (\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P)$ — A1 $[A = \neg\neg P,$ $B = \neg\neg\neg\neg P]$
3. $\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P$ — MP(1,2)

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \;\vdash\; P$.

1. $\neg\neg P$ — Př1
2. $\neg\neg P \to (\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P)$ — A1 $[A = \neg\neg P,$ $B = \neg\neg\neg\neg P]$
3. $\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P$ — MP(1,2)
4. $(\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P) \to (\neg P \to \neg\neg\neg P)$ — A3 $[A = \neg\neg\neg P,$ $B = \neg P]$

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \;\vdash\; P$.

1. $\neg\neg P$ — Př1
2. $\neg\neg P \to (\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P)$ — A1 $[A = \neg\neg P,$ $B = \neg\neg\neg\neg P]$
3. $\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P$ — MP(1,2)
4. $(\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P) \to (\neg P \to \neg\neg\neg P)$ — A3 $[A = \neg\neg\neg P,$ $B = \neg P]$
5. $\neg P \to \neg\neg\neg P$ — MP(3,4)

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \ \vdash \ P$.

1. $\neg\neg P$ — Př1
2. $\neg\neg P \rightarrow (\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P)$ — A1 $[A = \neg\neg P,\ B = \neg\neg\neg\neg P]$
3. $\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P$ — MP(1,2)
4. $(\neg\neg\neg\neg P \rightarrow \neg\neg P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg\neg\neg P)$ — A3 $[A = \neg\neg\neg P,\ B = \neg P]$
5. $\neg P \rightarrow \neg\neg\neg P$ — MP(3,4)
6. $\neg\neg P \rightarrow P$ — K(5)

Pom. prav. eliminace negace (EN)

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \;\vdash\; P$.

1.	$\neg\neg P$	Př1
2.	$\neg\neg P \to (\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P)$	A1 $[A = \neg\neg P,$ $B = \neg\neg\neg\neg P]$
3.	$\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P$	MP(1,2)
4.	$(\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P) \to (\neg P \to \neg\neg\neg P)$	A3 $[A = \neg\neg\neg P,$ $B = \neg P]$
5.	$\neg P \to \neg\neg\neg P$	MP(3,4)
6.	$\neg\neg P \to P$	K(5)
7.	P	MP(1,6)

Pom. prav. zavedení negace (ZN)

Dokažte platnost vztahu $P \ \vdash \ \neg\neg P$.

Pom. prav. zavedení negace (ZN)

Dokažte platnost vztahu $P \;\vdash\; \neg\neg P$.

1. P Př1

Pom. prav. zavedení negace (ZN)

Dokažte platnost vztahu $P \;\vdash\; \neg\neg P$.

1. P Př1
2. $\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P$ VD na pravidlo EN

Pom. prav. zavedení negace (ZN)

Dokažte platnost vztahu $P \vdash \neg\neg P$.

1. P Př1
2. $\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P$ VD na pravidlo EN
3. $P \rightarrow \neg\neg P$ K(2)

Pom. prav. zavedení negace (ZN)

Dokažte platnost vztahu $P \;\vdash\; \neg\neg P$.

1.	P	Př1
2.	$\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P$	VD na pravidlo EN
3.	$P \rightarrow \neg\neg P$	K(2)
4.	$\neg\neg P$	MP(1,3)

Pom. prav. sporné množiny (SM)

Dokažte platnost vztahu $A, \neg A \vdash B$

Pom. prav. sporné množiny (SM)

Dokažte platnost vztahu $A, \neg A \ \vdash \ B$

1. A Př1
2. $\neg A$ Př2

Pom. prav. sporné množiny (SM)

Dokažte platnost vztahu $A,\ \neg A \ \vdash\ B$

1.	A	Př1
2.	$\neg A$	Př2
3.	$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	A1

Pom. prav. sporné množiny (SM)

Dokažte platnost vztahu $A,\ \neg A \ \vdash\ B$

1. A Př1
2. $\neg A$ Př2
3. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ A1
4. $\neg B \rightarrow \neg A$ MP(2,3)

Pom. prav. sporné množiny (SM)

Dokažte platnost vztahu $A,\ \neg A\ \vdash\ B$

1.	A	Př1
2.	$\neg A$	Př2
3.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
4.	$\neg B \to \neg A$	MP(2,3)
5.	$A \to B$	K(4)

Pom. prav. sporné množiny (SM)

Dokažte platnost vztahu $A, \neg A \ \vdash \ B$

1.	A	Př1
2.	$\neg A$	Př2
3.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
4.	$\neg B \to \neg A$	MP(2,3)
5.	$A \to B$	K(4)
6.	B	MP(1,5)

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \;\vdash\; \neg(P \rightarrow Q)$

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \ \vdash \ \neg(P \rightarrow Q)$

1. P Př1
2. $\neg Q$ Př2

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \ \vdash \ \neg(P \rightarrow Q)$

1. P Př1
2. $\neg Q$ Př2
3. $P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ $2\times$ VD na MP $[A = P, \ B = Q]$

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$

1. P Př1
2. $\neg Q$ Př2
3. $P \to ((P \to Q) \to Q)$ $2\times$ VD na MP $[A = P,\ B = Q]$
4. $(P \to Q) \to Q$ MP(1,3)

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$

1.	P	Př1
2.	$\neg Q$	Př2
3.	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	$2\times$ VD na MP $[A = P,\ B = Q]$
4.	$(P \to Q) \to Q$	MP(1,3)
5.	$\neg\neg(P \to Q) \to \neg\neg Q$	ZN(4), ekviv

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \ \vdash \ \neg(P \to Q)$

1.	P	Př1
2.	$\neg Q$	Př2
3.	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	$2\times$ VD na MP $[A = P, \ B = Q]$
4.	$(P \to Q) \to Q$	MP(1,3)
5.	$\neg\neg(P \to Q) \to \neg\neg Q$	ZN(4), ekviv
6.	$\neg Q \to \neg(P \to Q)$	K(5)

Příklad

Dokažte platnost vztahu $P, \neg Q \;\vdash\; \neg(P \to Q)$

1. P Př1
2. $\neg Q$ Př2
3. $P \to ((P \to Q) \to Q)$ $2\times$ VD na MP $[A = P,\ B = Q]$
4. $(P \to Q) \to Q$ MP(1,3)
5. $\neg\neg(P \to Q) \to \neg\neg Q$ ZN(4), ekviv
6. $\neg Q \to \neg(P \to Q)$ K(5)
7. $\neg(P \to Q)$ MP(2,6)

Lemma o neutrální formuli

Lemma 1

$$A \to B,\ \neg A \to B \quad \vdash \quad B$$

Lemma o neutrální formuli

Pokud platí věty v předpokladech, musí existovat jejich důkazy

1.	C_1	1.	D_1
2.	C_2	2.	D_2
$\dots$		$\dots$	
u-1.	C_{u-1}	r-1.	D_{r-1}
u.	$C_u \quad = A \to B$	r.	$D_r \quad = \neg A \to B$

a navíc formule A může být interpretována pouze některou z hodnot $true$ nebo $false$.

Lemma o neutrální formuli

a) $I(A) = true$: vezmeme důkaz pro $A \rightarrow B$ a rozšíříme

Lemma o neutrální formuli

a) $I(A) = true$: vezmeme důkaz pro $A \to B$ a rozšíříme

1. C_1
2. C_2

$\dots$

u-1. C_{u-1}

u. $A \to B$

Lemma o neutrální formuli

a) $I(A) = true$: vezmeme důkaz pro $A \rightarrow B$ a rozšíříme

1. C_1
2. C_2

...

u-1. C_{u-1}

u. $A \rightarrow B$

u+1. A (protože $I(A) = true$)

u+2. B MP(u,u+1)

Lemma o neutrální formuli

b) $I(A) = false$: vezmeme důkaz pro $\neg A \rightarrow B$ a rozšíříme

Lemma o neutrální formuli

b) $I(A) = false$: vezmeme důkaz pro $\neg A \rightarrow B$ a rozšíříme

1. D_1
2. D_2

…

r-1. D_{r-1}

r. $\neg A \rightarrow B$

Lemma o neutrální formuli

b) $I(A) = false$: vezmeme důkaz pro $\neg A \rightarrow B$ a rozšíříme

1. D_1
2. D_2

$\ldots$

r-1. D_{r-1}

r. $\neg A \rightarrow B$

r+1. $\neg A$ $\quad$ ($I(A) = false,\ I(\neg A) = true$)

r+2. B $\quad$ MP(r,r+1)

Vlastnosti HAS VL – lemma

Lemma 2 *Nechť* F *je formule obsahující právě výrokové proměnné* $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Ve zvolené valuaci* v *označme:*

$F' = F$, *pokud* $I(F, v) = 1$,
$F' = \neg F$, *pokud* $I(F, v) = 0$

$p_i' = p_i$, *pokud* $v(p_i) = 1$,
$p_i' = \neg p_i$, *pokud* $v(p_i) = 0$ *pro každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$

Pak platí

$$p_1', p_2', \ldots, p_n' \quad \vdash \quad F'$$

Vlastnosti HAS VL – lemma

Lemma 3 *Nechť* F *je formule obsahující právě výrokové proměnné* $p_1, p_2, \ldots, p_n$*. Ve zvolené valuaci* v *označme:*

$F' = F$*, pokud* $I(F, v) = 1$*,*
$F' = \neg F$*, pokud* $I(F, v) = 0$

$p_i' = p_i$*, pokud* $v(p_i) = 1$*,*
$p_i' = \neg p_i$*, pokud* $v(p_i) = 0$ *pro každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$

Pak platí

$$p_1', p_2', \ldots, p_n' \quad \vdash \quad F'$$

Důkaz bude veden podobně jako v SPD, matematickou indukcí podle složitosti formule.

Vlastnosti HAS VL – lemma

Báze indukce: $F = p$ (0 logických spojek)

$p' \ \vdash \ p'$ platí, protože jde o větu o implikaci ($\vdash \ A \to A$)
s uplatněnou větou o dedukci.

Vlastnosti HAS VL – lemma

Báze indukce: $F = p$ (0 logických spojek)
$p' \;\vdash\; p'$ platí, protože jde o větu o implikaci ($\vdash\; A \rightarrow A$)
s uplatněnou větou o dedukci.

Předpoklad indukce: předpokládejme, že věta platí pro formule B, C o složitosti nejvýše k:

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \;\vdash\; B'$$
$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \;\vdash\; C'$$

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k + 1$.

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

a) $F = \neg B$, B je formule o složitosti k

Máme dokázat, že platí

$$p_1', p_2', \ldots, p_n' \ \vdash \ (\neg B)'$$

Protože platí předpoklad indukce, dokazujeme

$$B' \ \vdash \ (\neg B)'$$

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

a) $F = \neg B$, B je formule o složitosti k

Máme dokázat, že platí

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \;\vdash\; (\neg B)'$$

Protože platí předpoklad indukce, dokazujeme

$$B' \;\vdash\; (\neg B)'$$

1) $I(B) = 0 \;\Rightarrow$ dokazujeme $\neg B \;\vdash\; \neg B$, věta o implikaci

2) $I(B) = 1 \;\Rightarrow$ dokazujeme $B \;\vdash\; \neg\neg B$, dokázáno jako pravidlo ZN

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

b) $F = B \rightarrow C$, kde B, C jsou formule složitosti nejvýše k. Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$F = (B \rightarrow C)$	*dokazujeme* ($B', C' \vdash F'$):	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$	(1)
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \rightarrow C$	(2)
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$	(3)
1	1	1	$B, C \vdash B \rightarrow C$	(4)

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

b) $F = B \rightarrow C$, kde B, C jsou formule složitosti nejvýše k. Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$F = (B \rightarrow C)$	*dokazujeme* ($B', C' \vdash F'$):	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$	(1)
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \rightarrow C$	(2)
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$	(3)
1	1	1	$B, C \vdash B \rightarrow C$	(4)

(1),(2): $\neg B \vdash B \rightarrow C$, neboli $\neg B, B \vdash C$ (podle věty o dedukci)
$\Rightarrow$ dokázáno, pravidlo sporné množiny.

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

b) $F = B \rightarrow C$, kde B, C jsou formule složitosti nejvýše k. Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$F = (B \rightarrow C)$	*dokazujeme* ($B', C' \vdash F'$):	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$	(1)
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \rightarrow C$	(2)
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$	(3)
1	1	1	$B, C \vdash B \rightarrow C$	(4)

(3): $B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$

Tento vztah je dokázán jako věta $P, \neg Q \vdash \neg(P \rightarrow Q)$.

Vlastnosti HAS VL – lemma

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k+1$.

b) $F = B \rightarrow C$, kde B, C jsou formule složitosti nejvýše k. Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$F = (B \rightarrow C)$	*dokazujeme* ($B', C' \vdash F'$):	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$	(1)
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \rightarrow C$	(2)
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$	(3)
1	1	1	$B, C \vdash B \rightarrow C$	(4)

(4): $C \vdash B \rightarrow C$
Uplatníme větu o dedukci na axiom A1 $C \rightarrow (B \rightarrow C)$

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Korektnost – postup důkazu:

- dokážeme korektnost axiomů (musí být logicky platné formule),

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Korektnost – postup důkazu:

- dokážeme korektnost axiomů (musí být logicky platné formule),
- dokážeme korektnost odvozovacího pravidla MP (musí zachovávat splnitelnost),

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Korektnost – postup důkazu:

- dokážeme korektnost axiomů (musí být logicky platné formule),
- dokážeme korektnost odvozovacího pravidla MP (musí zachovávat splnitelnost),
- dokážeme korektnost konstrukce důkazu.

Postova věta „$\Rightarrow$“, korektnost

- korektnost logických axiomů, ukázka na A1

$$\vdash \; A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Postova věta „⇒“, korektnost

- korektnost logických axiomů, ukázka na A1
- korektnost odvozovacího pravidla MP

$$\vdash \ A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

A	B	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$A \rightarrow B, A \ \vdash \ B$$

A	B	$A \rightarrow B$	A	B
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

Postova věta „$\Rightarrow$“, korektnost

- korektnost logických axiomů, ukázka na A1
- korektnost odvozovacího pravidla MP
- korektnost konstrukce důkazu – matematickou indukcí podle posloupnosti důkazu $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Postova věta „$\Rightarrow$“, korektnost

- korektnost logických axiomů, ukázka na A1
- korektnost odvozovacího pravidla MP
- korektnost konstrukce důkazu – matematickou indukcí podle posloupnosti důkazu $A_1, A_2, \dots, A_n$

Báze indukce: První člen posloupnosti důkazu je

- logický axiom – dokázáno, že je log. platný,
- předpoklad – jen omezuje množinu ohodnocení, ve kterých musí být závěr splnitelný.

Postova věta „⇒“, korektnost

- korektnost logických axiomů, ukázka na A1
- korektnost odvozovacího pravidla MP
- korektnost konstrukce důkazu – matematickou indukcí podle posloupnosti důkazu $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Báze indukce: První člen posloupnosti důkazu je

- logický axiom – dokázáno, že je log. platný,
- předpoklad – jen omezuje množinu ohodnocení, ve kterých musí být závěr splnitelný.

Předpoklad indukce: Nechť je důkaz korektní až ke k-tému členu (A_k) ⇒ všechny formule A_i pro $i \leq k$ jsou splnitelné ve všech ohodnoceních, ve kterých je splnitelná množina až dosud uvedených předpokladů.

Postova věta „$\Rightarrow$“, korektnost

- korektnost logických axiomů, ukázka na A1
- korektnost odvozovacího pravidla MP
- korektnost konstrukce důkazu – matematickou indukcí podle posloupnosti důkazu $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Krok indukce: A_{k+1}

- je logický axiom – dokázáno,
- je předpoklad – viz výše,
- vznikla z předchozích členů posloupnosti $A_i, A_j,\ i \neq j$ uplatněním pravidla MP, $i, j \leq k$

Korektnost pravidla MP byla dokázána, proto i formule A_{k+1} je splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých je splnitelná množina dosud uvedených předpokladů.

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Úplnost – postup důkazu:

- předpokládáme, že A je logicky platná,

Vlastnosti HAS VL – Postova věta

Věta 1 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

Úplnost – postup důkazu:

- předpokládáme, že A je logicky platná,
- používáme lemma o neutrální formuli a lemma o čárkování.

Postova věta „$\Rightarrow$", úplnost

A je logicky platná (tj. $\models A$)

Postova věta „$\Rightarrow$“, úplnost

A je logicky platná (tj. $\models A$)

$\Rightarrow$ $$p_1', p_2', \ldots, p_n' \vdash A$$

Postova věta „$\Rightarrow$“, úplnost

A je logicky platná (tj. $\models A$)

$\Rightarrow$

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p_1, p'_2, \ldots, p'_n &\vdash A \\ \neg p'_1, p'_2, \ldots, p'_n &\vdash A \end{aligned}$$

Postova věta „⇒“, úplnost

A je logicky platná (tj. $\models A$)

$\Rightarrow$

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p_1, p'_2, \ldots, p'_n &\vdash A \\ \neg p'_1, p'_2, \ldots, p'_n &\vdash A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (podle lemmatu o neutrální formuli):

$$p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

Toto provedeme postupně pro všechny výrokové proměnné, které se ve formuli A vyskytují, dostaneme $\vdash A$

Bezespornost

Věta (bezespornost systému) Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky je bezesporný.

Bezespornost

Věta (bezespornost systému) Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky je bezesporný.

Důkaz: Kdyby byl tento systém sporný, pak by v něm pro některou formuli A byla dokazatelná A i $\neg A$.

Bezespornost

Věta (bezespornost systému) Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky je bezesporný.

Důkaz: Kdyby byl tento systém sporný, pak by v něm pro některou formuli A byla dokazatelná A i $\neg A$.

Podle Postovy věty by pak platilo $\models A$ i $\models \neg A$, což není možné.

Bezespornost

Věta (bezespornost systému) Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky je bezesporný.

Důkaz: Kdyby byl tento systém sporný, pak by v něm pro některou formuli A byla dokazatelná A i $\neg A$.

Podle Postovy věty by pak platilo $\models A$ i $\models \neg A$, což není možné.

Tedy Hilbertovský systém výrokové logiky je bezesporný.