# Hilbertovský axiomatický systém

## Predikátová logika – $\mathcal{H}_1$

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky, FPF SU Opava

Poslední aktualizace: 24. října 2008

# Specifikace $\mathcal{H}_1$

## Jazyk $L_{\mathcal{H}_1}$

přejímáme jazyk predikátové logiky prvního řádu s omezením na logické spojky $\neg$, $\rightarrow$ a $\forall$

## Axiomy

| | |
|---|---|
| A1,A2,A3 | Přejaté z Hilbertovského systému VL |
| A4 | $\vdash \forall x A \rightarrow A(x/t)$ (axiom specifikace) |
| A5 | $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ (axiom kvantifikace implikace) |

tyto axiomy mají svá *omezení*:

1. A4: term $t$ musí být substituovatelný za $x$.
2. A5: $x$ nesmí být volná proměnná v $A$.

# Specifikace $\mathcal{H}_1$

## Odvozovací pravidla

1. *Modus Ponens*

$$A \rightarrow B,\ A \quad \vdash \quad B$$

2. odvozovací pravidlo *generalizace* (značíme G):

$$A \quad \vdash \quad \forall x A$$

# Definice důkazu v $\mathcal{H}_1$

## Definice

*Důkaz formule $F$ z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ je konečná posloupnost formulí $A_1, \ldots, A_m$ jazyka $L_{\mathcal{H}_1}$, kde $F = A_m$ a pro každé $A_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, platí některá z možností:*

- *$A_i \in \{P_1, \ldots, P_n\}$ (tj. je to některý z předpokladů),*
- *$A_i$ je logický axiom,*
- *$A_i$ vznikla použitím odvozovacího pravidla MP na některé předchozí členy posloupnosti,*
- *$A_i$ vznikla použitím odvozovacího pravidla G na některý předchozí člen posloupnosti.*

*Vše, co bylo dokázáno v Hilbertovském systému VL, přejmeme.*

# Příklad 1

Dokažte platnost vztahu $A \to B \;\vdash\; \forall x A \to \forall x B$

1. $A \to B$ Př1
2. $\forall x A \to A$ A4
3. $\forall x A \to B$ TI(1,2)
4. $\forall x(\forall x A \to B)$ G(3)
5. $\forall x(\forall x A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$ A5
6. $\forall x A \to \forall x B$ MP(4,5)

# Příklad 1

Dokažte platnost vztahu $A \to B \ \vdash \ \forall x A \to \forall x B$

1. $A \to B$ Př1
2. $\forall x A \to A$ A4
3. $\forall x A \to B$ TI(1,2)
4. $\forall x (\forall x A \to B)$ G(3)
5. $\forall x (\forall x A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$ A5
6. $\forall x A \to \forall x B$ MP(4,5)

# Příklad 1

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B \ \vdash \ \forall x A \rightarrow \forall x B$

1. $A \rightarrow B$ Př1
2. $\forall x A \rightarrow A$ A4
3. $\forall x A \rightarrow B$ TI(1,2)
4. $\forall x(\forall x A \rightarrow B)$ G(3)
5. $\forall x(\forall x A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$ A5
6. $\forall x A \rightarrow \forall x B$ MP(4,5)

# Příklad 1

Dokažte platnost vztahu $A \to B \ \vdash \ \forall x A \to \forall x B$

1. $A \to B$ Př1
2. $\forall x A \to A$ A4
3. $\forall x A \to B$ TI(1,2)
4. $\forall x(\forall x A \to B)$ G(3)
5. $\forall x(\forall x A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$ A5
6. $\forall x A \to \forall x B$ MP(4,5)

# Příklad 1

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B \ \vdash \ \forall x A \rightarrow \forall x B$

1. $A \rightarrow B$ Př1
2. $\forall x A \rightarrow A$ A4
3. $\forall x A \rightarrow B$ TI(1,2)
4. $\forall x(\forall x A \rightarrow B)$ G(3)
5. $\forall x(\forall x A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$ A5
6. $\forall x A \rightarrow \forall x B$ MP(4,5)

# Příklad 1

Dokažte platnost vztahu $A \to B \vdash \forall x A \to \forall x B$

1. $A \to B$ — Př1
2. $\forall x A \to A$ — A4
3. $\forall x A \to B$ — TI(1,2)
4. $\forall x(\forall x A \to B)$ — G(3)
5. $\forall x(\forall x A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$ — A5
6. $\forall x A \to \forall x B$ — MP(4,5)

# Příklad 2

Dokažte platnost vztahu $A \to B \;\vdash\; A \to \forall x B$ ($x$ není volná v $A$) – pomocné odvozovací pravidlo *zavedení obecného kvantifikátoru*, značíme Z$\forall$

1. $A \to B$ Př1
2. $\forall x(A \to B)$ G(1)
3. $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ A5
4. $A \to \forall x B$ MP(2,3)

# Příklad 2

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B \ \vdash \ A \rightarrow \forall x B$ ($x$ není volná v $A$) – pomocné odvozovací pravidlo *zavedení obecného kvantifikátoru*, značíme Z$\forall$

1. $A \rightarrow B$ Př1
2. $\forall x(A \rightarrow B)$ G(1)
3. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ A5
4. $A \rightarrow \forall x B$ MP(2,3)

# Příklad 2

Dokažte platnost vztahu $A \to B \;\vdash\; A \to \forall x B$ ($x$ není volná v $A$) – pomocné odvozovací pravidlo *zavedení obecného kvantifikátoru*, značíme Z∀

1. $A \to B$ Př1
2. $\forall x(A \to B)$ G(1)
3. $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ A5
4. $A \to \forall x B$ MP(2,3)

# Příklad 2

Dokažte platnost vztahu $A \rightarrow B \ \vdash \ A \rightarrow \forall x B$ ($x$ není volná v $A$) – pomocné odvozovací pravidlo *zavedení obecného kvantifikátoru*, značíme Z∀

1. $A \rightarrow B$ — Př1
2. $\forall x(A \rightarrow B)$ — G(1)
3. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ — A5
4. $A \rightarrow \forall x B$ — MP(2,3)

# Postova věta

*Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému predikátové logiky jsou právě logicky platné formule predikátové logiky, tedy pro každou formuli predikátové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A$$

# Postova věta – *korektnost*

- korektnost axiomů A1, A2, A3 a pravidla MP již dokázána,
- důkaz korektnosti konstrukce důkazu lze přejmout,
- zbývá: A4, A5, pravidlo G.

# Postova věta – *korektnost*

## Korektnost axiomu A4 – $\forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$

(důkaz sporem ve struktuře $\mathcal{S}$):

- Označme $a$ prvek univerza diskurzu, který vznikne vyhodnocením termu $t$ ve struktuře $\mathcal{S}$.
- Jestliže neplatí $\forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$, pak
  - $I(\forall x A(x))[\mathcal{S}] = true$
  - $I(A(x/t))[\mathcal{S}] = false$
- Potom ale $I(A(x/t)) = I(A(x/a)) = false$ (dosadili jsme za $x$ jakýkoliv prvek univerza)
- $\Rightarrow$ *spor* s platností formule $\forall x A(x)$.

Obdobně lze dokázat také platnost axiomu A5 a odvozovacího pravidla Generalizace.

# Postova věta – *úplnost*

## Myšlenka:

Víme že $\vdash A$. Vytvoříme výrokovou formuli $B$ úpravou formule $A$:

- provedeme skolemizaci formule $A$,
- převedeme formuli $A$ do klauzulární formy,
- oddělíme prefix s kvantifikátory,
- za různé atomické formule s (vázanými) predikátovými proměnnými dosadíme různé výrokové proměnné.

Stačí dokázat úplnost pro (výrokovou) formuli $B$.

$\Rightarrow$ Důkaz úplnosti Hilbertovského systému PL jsme převedli na důkaz úplnosti Hilbertovského systému VL.

# Splnitelnost pravidla G

*Neplatí* $\vdash A \rightarrow \forall x A$.

## Důkaz:

- Nechť univerzum diskurzu obsahuje prvky $a, b$ takové, že $I(A(x/a)) = true$ a $I(A(x/b)) = false$.
- $\Rightarrow$ $I(\forall x A) = false$ pro jakékoliv ohodnocení,
- $\Rightarrow$ ze sémantického významu implikace: $I((A \rightarrow \forall x A)(x/a)) = false$
- $\Rightarrow$ $A \rightarrow \forall x A$ nemůže být logicky platná.

# Splnitelnost pravidla G

*Neplatí* $\vdash A \rightarrow \forall x A$.

## Důkaz:

- Nechť univerzum diskurzu obsahuje prvky $a, b$ takové, že $I(A(x/a)) = true$ a $I(A(x/b)) = false$.
- $\Rightarrow$ $I(\forall x A) = false$ pro jakékoliv ohodnocení,
- $\Rightarrow$ ze sémantického významu implikace: $I((A \rightarrow \forall x A)(x/a)) = false$
- $\Rightarrow$ $A \rightarrow \forall x A$ nemůže být logicky platná.

# Splnitelnost pravidla G

*Neplatí* $\vdash \ A \rightarrow \forall x A$.

## Důkaz:

- Nechť univerzum diskurzu obsahuje prvky $a, b$ takové, že $I(A(x/a)) = true$ a $I(A(x/b)) = false$.
- $\Rightarrow \quad I(\forall x A) = false$ pro jakékoliv ohodnocení,
- $\Rightarrow$ ze sémantického významu implikace: $I((A \rightarrow \forall x A)(x/a)) = false$
- $\Rightarrow \quad A \rightarrow \forall x A$ nemůže být logicky platná.

# Splnitelnost pravidla G

*Neplatí* $\vdash A \rightarrow \forall x A$.

## Důkaz:

- Nechť univerzum diskurzu obsahuje prvky $a, b$ takové, že $I(A(x/a)) = true$ a $I(A(x/b)) = false$.
- $\Rightarrow \quad I(\forall x A) = false$ pro jakékoliv ohodnocení,
- $\Rightarrow$ ze sémantického významu implikace: $I((A \rightarrow \forall x A)(x/a)) = false$
- $\Rightarrow \quad A \rightarrow \forall x A$ nemůže být logicky platná.

# Splnitelnost pravidla G

*Pravidlo Generalizace* se má správně psát takto:

$$\vdash \ A[\mathcal{S}] \quad \Rightarrow \quad \vdash \ \forall x A[\mathcal{S}]$$

Neplatí však věta

$$\vdash \ A \rightarrow \forall x A$$

- nezachovává splnitelnost,
- zachovává alespoň dokazatelnost (z dokazatelné formule vytvoří dokazatelnou formuli)
- $\Rightarrow$ Pozor na kombinování věty o dedukci a pravidla Generalizace!