INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Šárka Vavrečková

Logika a logické programování

dodatek pro studenty doktorského studia

Slezská univerzita v Opavě
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě
Ústav informatiky

Opava, poslední aktualizace 20. února 2011

Anotace: Tento dokument je určen pro studenty doktorského studia informatiky na Ústavu informatiky Slezské univerzity v Opavě – obor Autonomní systémy, pro předmět *Logika a logické programování*.

Logika a logické programování

dodatek pro studenty doktorského studia

RNDr. Šárka Vavrečková, Ph.D.

Dostupné na: http://fpf.slu.cz/~vav10ui/log2.html

Ústav informatiky
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě
Slezská univerzita v Opavě
Bezručovo nám. 13, 746 01 Opava

Sázeno v systému LaTeX

Tato inovace předmětu Logika a logické programování pro doktorské studium je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ.1.07/2.3.00/0 9.0197, „Posílení konkurenceschopnosti výzkumu a vývoje informačních technologií v Moravskoslezském kraji“.

Obsah

Kapitola 1

Pojmy

1.1 Co už bychom měli znát

Před studiem následujícího textu by čtenář měl zvládnout a *pochopit* učivo předmětu Logika a logické programování z bakalářského stupně studijního oboru Informatika a výpočetní technika. Jde především o znalost výrokové a predikátové logiky, formálních systémů a teorií (základní pojmy a postupy, aplikace na Systému přirozené dedukce), dále klauzulární logiky, základů programování v Prologu a principu odvozování v logických programovacích jazycích.

Především bychom měli mít jasno v pojmech formální systém, logický systém, korektnost, úplnost, bezespornost, formule platná ve struktuře, splnitelná ve struktuře, logicky platná či pravdivá.

1.2 Nové pojmy

Dále budeme předpokládat znalost všech pojmů, se kterými jsme se seznámili ve skriptech pro bakalářské studium.

Další pojmy:

Formule je rozhodnutelná v daném formálním systému, jestliže v tomto systému lze dokázat buď tuto formuli nebo její negaci.

Formální systém je rozhodnutelný, jestliže jsou v něm rozhodnutelné všechny dobře utvořené formule (utvořené nad jazykem systému).

Teorie vzniká přidáním speciálních axiomů k některému formálnímu systému (například Hilbertovskému, Gentzenovskému nebo Systému přirozené dedukce) nad zvoleným jazykem. Pojmy formální systém, logický axiom a speciální axiom už známe.

Formule F je teorémem v teorii T, jestliže je v této teorii dokazatelná.

Teorie T_1 je silnější než teorie T_2, jestliže všechny teorémy teorie T_2 jsou dokazatelné v teorii T_1, ale ne naopak (tj. existuje alespoň jeden teorém teorie T_1, který není dokazatelný v teorii T_2).

Teorie T_1 a T_2 jsou ekvivalentní, pokud jsou stejně silné, tj. všechny teorémy dokazatelné v T_1 jsou dokazatelné i v T_2 a naopak.

Prvek x je idempotentní vzhledem k operaci $\circ$, jestliže platí $x \circ x = x$ (předpokládáme, že operace $\circ$ je binární).

Formální systém (jakýkoliv) je vlastně také teorií (s prázdnou množinou speciálních axiomů). Jako definici to ale chápat nebudeme, protože by vlastně šlo o kruhovou definici (teorie je definována na základě formálního systému, tedy nelze formální systém definovat s využitím teorie).

Definice 1.1 (Důkaz formule v teorii) *Důkaz formule F v teorii T je posloupnost formulí $A_1, A_2, \dots, A_n$, kde $A_n = F$ a každý prvek posloupnosti $A_i,\ 1 \leq n$, je:*

- *logický axiom nebo*
- *speciální axiom teorie či předpoklad nebo*
- *vznikl uplatněním některého dedukčního či odvozovacího pravidla teorie (podle typu systému, nad kterým je teorie postavena).*

To, že je formule F dokazatelná v teorii T, značíme $T \vdash F$.

Definice 1.2 (Model teorie) *Model teorie T je struktura aplikovatelná na tuto teorii.*

Korektní definici nového pojmu či označení lze provést dvěma způsoby:

1. definitoricky pomocí symbolů $=_{df}$ (nový funktor či funkce) nebo $\Leftrightarrow_{df}$ (nový predikát či relace)
2. pomocí speciálního axiomu s využitím ekvivalence.

Příklad 1.2.1

Pokud již máme zaveden operátor $<$ (menší než), lze zavést operátor $>$ (větší než) jedním z těchto dvou způsobů:

- položíme definitoricky $x > y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad y < x$
- speciální axiom $\forall x \forall y\ (x > y) \leftrightarrow (y < x)$

Oba způsoby jsou možné.

Dále můžeme například definovat $\mathrm{mocnina}(x) \ =_{df}\ x * x$, pokud je již zavedena operace násobení. Vztah ostrého uspořádání na množině přirozených čísel s operací sčítání můžeme

definovat takto:
$x < y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \exists z\,(x + z = y)$

Vztah nerovnosti definujeme takto:
$x \neq y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \neg(x = y)$

Levá strana definice (to, co definujeme) se nazývá *definiens*, pravá strana definice (obsahuje to, co již bylo dříve definováno) se nazývá *definiend*. Existují také tzv. rekurzivní definice, kde nově definovaný symbol či pojem se nachází i v definiendu, ale stejně jako u programování, i zde je nutné myslet na zastavení rekurze. V definici, která není rekurzivní, se definovaný symbol či pojem nachází pouze v levé části definice (definiens). Aby definice byla korektní, musí splňovat tyto náležitosti:

- Definovaný symbol se v teorii dosud nevyskytoval.
- Definiens obsahuje pouze to, co definujeme, definiend pouze to, co už je definováno (s výjimkou rekurzivních definic).
- Pokud se v definici vyskytuje volná proměnná, pak musí být v definiensu i definiendu.

Úkoly

Předpokládejme, že je na množině M definován vztah ostré nerovnosti $<$ a vztah rovnosti $=$. S využitím těchto vztahů definujte vztah $\leq$ oběma způsoby – definitoricky i pomocí speciálního axiomu.

Kapitola 2

Budování teorií

V této kapitole si představíme několik nejběžnějších algebraických teorií.

2.1 Teorie rovnosti

Na teorii rovnosti staví většina dalších teorií, kterým se budeme dále věnovat, proto se na ni podíváme nejdřív. Tuto teorii postavíme na některém formálním systému predikátové logiky – je celkem jedno, kterém, může to být Hilbertovský systém, Systém přirozené dedukce nebo kterýkoliv další, o kterém víme, že je korektní a úplný nad predikátovou logikou. Vezměme tedy jako základ jazyk predikátové logiky a dále axiomy a dedukční či odvozovací pravidla vybraného systému.

V dalším textu budeme používat speciální binární predikátový symbol pro rovnost (=), pro lepší přehlednost jej budeme zapisovat v infixovém tvaru, který je v matematice běžný. Potřebujeme tyto speciální axiomy:

SAR1:	$\forall x(x = x)$	axiom reflexivity rovnosti
SAR2:	$\forall x \forall y \Big((x = y) \rightarrow (y = x)\Big)$	axiom symetrie rovnosti
SAR3:	$\forall x \forall y \forall z \Big((x = y) \,\&\, (y = z) \rightarrow (x = z)\Big)$	axiom tranzitivity rovnosti

Tabulka 2.1: Speciální axiomy teorie rovnosti

Relace interpretující predikátový symbol rovnosti tedy musí být *reflexivní* (každá entita se rovná sama sobě, axiom SAR1), *symetrická* (obdoba vlastnosti komutativity, kterou známe například u sčítání čísel, axiom SAR2) a *tranzitivní* (axiom SAR3).

Modelů této teorie je poměrně hodně. Jako univerzum diskurzu lze použít nejrůznější množiny čísel (celá čísla, racionální atd.), ale také množinu matic nebo téměř čehokoliv jiného. Pokud si za univerzum zvolíme množinu celých čísel, pak získáme algebraickou strukturu $(\mathbb{Z}, =)$, jejíž *nosnou množinou*[1] je množina celých čísel. Model (struktura) pro tento případ by byl $(\mathbb{Z}, \{=, \ldots\}, \{\ldots\})$ (další relace a případně funkce bychom doplnili podle potřeby).

Pokud jako univerzum zvolíme množinu množin (typicky potenční množinu některé množiny), pak už nehovoříme o rovnosti, ale o ekvivalenci. Pro připomenutí – co je to potenční množina?

Příklad 2.1.1

Pokud například $M = \{a, b, c\}$, tak potenční množina $\mathcal{P}(M)$ množiny M je
$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\Big\}$

Teď už víme, že potenční množina dané množiny je množina všech možných podmnožin této množiny. Je zřejmé, že potenční množina nekonečné množiny je také nekonečná. Kromě označení $\mathcal{P}(M)$ se také můžeme setkat s označením 2^M, které je odvozeno z označení funkce pro počet prvků potenční množiny.

O *relaci ekvivalence* (množin, formulí, apod.) víme, že také musí splňovat vlastnost reflexivity, symetrie a tranzitivity, a tedy s ní můžeme zacházet stejně jako s rovností, proto dalším možným modelem naší teorie může být $(\mathcal{P}(M), \{\Leftrightarrow, \ldots\}, \{\ldots\})$, kde M je některá množina (například celých čísel). Dvě podmnožiny množiny M jsou ekvivalentní právě tehdy a jen tehdy, se shodují ve svých prvcích.

U ekvivalence (ale i u jiných denotací relace rovnosti) bychom si měli dávat pozor na to, že ekvivalence ještě neznamená identitu. Například u relace ekvivalence definované na množině formulí se běžně setkáváme s tím, že dvě ekvivalentní formule nejsou identické.

2.2 Teorie uspořádání

2.2.1 Teorie ostrého lineárního uspořádání

V dalším textu budeme používat speciální binární predikátové symboly pro rovnost (=) a nerovnost (<), opět je budeme zapisovat v infixovém tvaru. Předpokládejme již existenci speciálních axiomů rovnosti (SAR1 až SAR3). Navíc potřebujeme tyto speciální axiomy:

Příklad 2.2.1

Je zřejmé, že pokud bychom chtěli tuto teorii rozšířit i na racionální čísla (a případně další nadmnožiny), potřebovali bychom ještě jeden axiom:

SAU8: $\forall x \forall y \Big((x < y) \rightarrow \exists z \big((x < z) \,\&\, (z < y) \big) \Big)$

[1]Všimněte si, že co se v algebře nazývá nosnou množinou, to je pro nás obvykle univerzem diskurzu.

SAU1:	$\forall x \forall y \Big((x < y) \rightarrow \neg(y < x) \Big)$	axiom antisymetrie nerovnosti
SAU2:	$\forall x \forall y \forall z \Big((x < y) \mathbin{\&} (y < z) \rightarrow (x < z) \Big)$	axiom tranzitivity nerovnosti
SAU3:	$\forall x \exists y (x < y)$	ke každému prvku existuje větší i menší prvek
SAU4:	$\forall x \exists y (y < x)$	
SAU5:	$\forall x \forall y \Big((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x) \Big)$	lineární uspořádání (trichotomické, každé dva prvky jsou porovnatelné)
SAU6:	$\forall x \forall y \forall z \Big((x = y) \mathbin{\&} (x < z) \rightarrow (y < z) \Big)$	vztah mezi rovností a nerovností
SAU7:	$\forall x \forall y \forall z \Big((x = y) \mathbin{\&} (z < x) \rightarrow (z < y) \Big)$	

Tabulka 2.2: Speciální axiomy teorie ostrého úplného lineárního uspořádání

Jako univerzum diskurzu bychom tedy mohli použít především zvolenou množinu čísel (celých, případně racionálních).

Všechny speciální axiomy z tabulky 2.2 splňuje například algebraická struktura $(\mathbb{Z}, <)$, kde využijeme strukturu pro interpretaci $S = (\mathbb{Z}, \{=, <, \ldots\}, \{\ldots\})$ (univerzum je množina celých čísel, jsou definovány relace rovnosti a ostré nerovnosti, funkce nás zatím nezajímají). Tato struktura je tedy jedním z modelů teorie vybudované z daných speciálních axiomů.

Příklad 2.2.2

V úvahu může připadat ještě další axiom:

SAU9: $\exists n \forall x (n < x)$ existence nejmenšího prvku (minima)

Například pokud jako nosnou množinu (pro nás univerzum diskurzu) použijeme množinu přirozených čísel bez nuly, což představuje algebraickou strukturu $(\mathbb{N}, <)$, není splněn speciální axiom SAU4, ale naopak lze použít speciální axiom SAU9 (existuje nejmenší prvek). Axiom existence nejmenšího prvku se často používá zároveň s axiomem lineárního uspořádání (i když to není nutné).

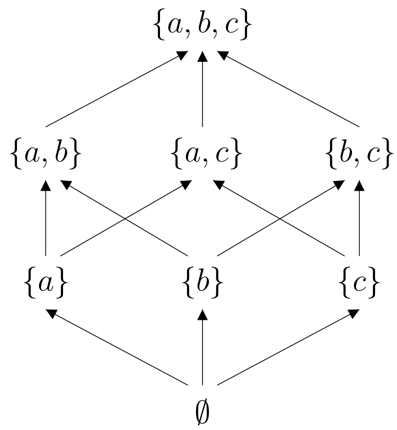
Tedy jestliže teorii upravíme odebráním axiomu SAU4 a přidáním axiomu SAU9, modelem je například struktura pro interpretaci $(\mathbb{N}, \{=, <, \ldots\}, \{\ldots\})$.

Příklad 2.2.3

Modelem teorie ostrého uspořádání (axiomy SAU1 a SAU2) je také následující struktura:

$(\mathcal{P}(M), \{\Leftrightarrow, \subset\}, \{\ldots\})$

kde M je některá (předpokládejme neprázdná) množina. Uspořádání vlastní inkluzí $\subset$ není lineární, existují i neporovnatelné množiny. Pokud například vezmeme $M = \{a, b, c\}$, tak sice například $\{a\} \subset \{a, b\}$, ale množiny $\{a\}$ a $\{b, c\}$ nejsou porovnatelné.



Uspořádání (konečných) potenčních množin inkluzí je možné znázornit tzv. *Hasseovým diagramem*,[2] který vidíme vpravo. V Hasseově diagramu jsou porovnatelné množiny na stejné cestě v orientovaném grafu. Jak vidíme, v našem případě jsou se všemi ostatními množinami porovnatelné pouze prázdná množina a samotná množina M, pro kteroukoliv z ostatních množin lze najít alespoň jednu množinu, se kterou není porovnatelná.

Úkoly

Naznačte Hasseův diagram lineárního uspořádání množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ relací $<$. Vytvořte Hasseův diagram pro její podmnožinu $\{3, 4, 5, 6\}$. Jak tedy vypadá Hasseův diagram množiny s úplným lineárním uspořádáním?

2.2.2 Teorie částečného (neostrého) uspořádání

Pro binární relaci částečného uspořádání (a také pro příslušný predikát) obvykle používáme symbol „$\leq$“. Daná množina s touto relací je částečně uspořádaná, pokud splňuje vlastnost reflexivity, antisymetrie a tranzitivity tak jak je naznačeno v tabulce 2.3. Je třeba mít k dispozici také axiomy pro rovnost (v tabulce 2.1 na straně 4).

SAO1:	$\forall x (x \leq x)$	axiom reflexivity
SAO2:	$\forall x \forall y \Big((x \leq y) \,\&\, (y \leq x) \rightarrow (x = y)\Big)$	axiom antisymetrie
SAO3:	$\forall x \forall y \forall z \Big((x \leq y) \,\&\, (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)\Big)$	axiom tranzitivity

Tabulka 2.3: Speciální axiomy teorie neostrého (částečného) uspořádání

[2] Hasseův diagram slouží ke znázornění vztahu mezi prvky určeného danou relací, u které se nepředpokládá vlastnost komutativity (relace uspořádání nebývají komutativní). Proto se obvykle používá právě ke znázorňování relací uspořádání. Pokud jsou prvky x a y v dané relaci (v tomto pořadí), pak v Hasseově diagramu vede orientovaná hrana od x k y. Pokud se jedná o neostré uspořádání, je každý prvek porovnatelný sám se sebou, ale „smyčky“ v tom případě do diagramu kreslit nebudeme. Autorem principu je německý matematik Helmut Hasse.

Podle konkrétních požadavků bychom mohli přidat další axiomy, jak jsme to udělali v případě ostrého uspořádání. Všimněte si odlišností v definování ostrého a neostrého uspořádání – vlastnost reflexivity je pouze u neostrého uspořádání, axiom antisymetrie je definován jinak a pouze tranzitivita je pojata stejně.

U neostrého uspořádání jsme „mlčky“ předpokládali, že relace „$<$“ je definována tak, jak je v matematice obvykle chápána, ale nemusí tomu být tak vždy. Také není nutné, aby nosnou množinou (univerzem) byla množina čísel, například uspořádáním na množině množin by mohl být vztah „je podmnožinou“.

Příklad 2.2.4

Přirozeným modelem, který nás hned napadne, je například struktura $(\mathbb{Z}, \{=, \leq\}, \{\dots\})$, dokonce zde můžeme přidat axiom lineárního uspořádání.

Naproti tomu, predikát $\leq$ můžeme interpretovat jinou relací. Označme $x|y$ vztahem dělitelnosti (x dělí y), definujeme je takto:

$x|y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \exists z(y = x \cdot z)$

(samozřejmě bychom měli mít předem definováno násobení čísel, tento operátor by byl v množině funkcí). Ve struktuře $(\mathbb{Z}, \{=, |\}, \{\cdot, \dots\})$ stanovme

$\mathrm{D}(\leq) = |$

(to znamená, že predikát $\leq$ bude nyní interpretován relací dělitelnosti). Jde sice také o uspořádání, protože například 8 by bylo „menší“ než 16 (zapisujeme $8|16$), ale některá čísla jsou neporovnatelná – například neplatí $4|5$ ani $5|4$. Přesto jde o model této teorie, protože je splněna vlastnost reflexivity (každé číslo je dělitelné samo sebou), antisymetrie (pokud jsou dvě čísla dělitelná sebou navzájem, jde o totéž číslo) a tranzitivity (například $2|6$ a $6|12$, tedy $2|12$).

Z toho je zřejmé, že axiomy SAO1 až SAO3 nezaručují úplnost ani linearitu uspořádání.

Podobně jako u ostrého uspořádání, i u částečného uspořádání lze najít model, jehož univerzum je množina množin a predikát částečné nerovnosti je denotován relací částečné inkluze $\subseteq$.

Úkoly

1. Vezměme relaci $\subseteq$ na potenční množině $\mathcal{P}(M)$ množiny $M = \{a, b\}$. O jakou teorii jde, které ze speciálních axiomů uvedených v předchozím textu splňuje (je jejich modelem)? Nakreslete Hasseův diagram množiny $\mathcal{P}(M)$ uspořádané relací $\subseteq$.
2. V příkladu 2.2.4 je definována relace uspořádání vztahem dělitelnosti. Nakreslete Hasseův diagram množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ uspořádané vztahem dělitelnosti. Všimněte si, jak je v diagramu opticky rozpoznatelný vztah nesoudělnosti (například čísla 2 a 3 jsou nesoudělná).

2.3 Teorie grup a okruhů

2.3.1 Teorie grup

Rozsáhlé pole pro příklady teorií se nabízí v algebře. Podíváme se na zavedení teorie grup.

Z algebry víme, že *grupa* je definována nad danou *nosnou množinou* (to pro nás bude univerzum diskurzu) s použitím některé *operace* nad touto množinou (tuto operaci označíme pro jednoduchost jako binární funkci f, kterou si můžeme představit například jako sčítání celých čísel). Tuto funkci umístíme do množiny funkcí ve stuktuře pro interpretaci.

Grupa je tedy algebraická struktura nad danou množinou a operací, která je asociativní, existuje v ní neutrální prvek a ke každému prvku existuje k němu inverzní prvek. Tyto vlastnosti zapíšeme následujícími speciálními axiomy:

SAG1:	$\forall x \forall y \forall z \Big(\mathrm{f}\big(x, \mathrm{f}(y,z)\big) = \mathrm{f}\big(\mathrm{f}(x,y), z\big)\Big)$	asociativita operace f
SAG2:	$\exists e \forall x \big(\mathrm{f}(e,x) = \mathrm{f}(x,e) = x\big)$	existence neutrálního prvku
SAG3:	$\forall x \exists y \Big(\big(\mathrm{f}(x,y) = e\big) \ \& \ \big(\mathrm{f}(y,x) = e\big)\Big)$, kde e je neutrální prvek grupy	ke každému prvku existuje jeho inverzní prvek

Tabulka 2.4: Speciální axiomy teorie grup

Jak vidíme, používáme zde predikát rovnosti, proto tyto tři speciální axiomy taktéž doplníme o axiomy SAR1, SAR2 a SAR3 definované v předchozím textu o teorii rovnosti.

Pokud budeme chtít definovat komutativní (Abelovu) grupu, potřebujeme ještě speciální axiom komutativity SAG4:

SAG4: $\forall x \forall y \big(f(x,y) = f(y,x)\big)$

Příklad 2.3.1

V komutativní grupě lze axiom SAG3 zjednodušit na

$$\forall x \exists y \big(\mathrm{f}(x,y) = e\big) \tag{2.1}$$

Stačí si uvědomit, že v komutativní grupě platí $\mathrm{f}(x,y) = \mathrm{f}(y,x)$ pro jakékoliv x, y, to znamená, že

$$\forall x \forall y \big(\mathrm{f}(x,y) = e \ \rightarrow \ \mathrm{f}(y,x) = e\big) \tag{2.2}$$

a tedy z platnosti formule (2.1) plyne platnost formule SAG3 (původního speciálního axiomu pro existenci neutrálního prvku) $\forall x \exists y \Big(\big(\mathrm{f}(x,y) = e\big) \ \& \ \big(\mathrm{f}(y,x) = e\big)\Big)$.

V komutativní grupě lze tedy axiom SAG3 z tabulky 2.4 nahradit výše uvedenou formulí (2.1) za předpokladu, že formule (2.1) není ve sporu s ostatními axiomy (není ve sporu, což si lze jednoduše ověřit – už víme, jak).

Příklad 2.3.2

Nyní záleží na tom, jak vybereme nosnou množinu (tedy univerzum diskurzu) a operaci f. Podíváme se na některé možnosti stanovení univerza a operace (jinými slovy, modely):

1. $S_1 = (\mathbb{Z}, \{=\}, \{+\})$ (univerzum diskurzu je množina celých čísel, dále máme relaci pro predikát rovnosti, v množině funkcí je operátor pro sčítání celých čísel)
2. $S_2 = (\mathbb{N}, \{=\}, \{+\})$ (univerzum je množina přirozených čísel bez nuly)
3. $S_3 = (\mathbb{Z}, \{=\}, \{*\})$ (v množině funkcí je operátor pro násobení celých čísel)
4. $S_4 = (\mathbb{R}, \{=\}, \{*\})$ (univerzum je množina reálných čísel)
5. $S_5 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \{=\}, \{*\})$ (univerzum je množina reálných čísel bez nuly)

Pomocí struktury S_1 a speciálních axiomů SAR1–3 a SAG1–4 můžeme vytvořit komutativní grupu $(\mathbb{Z}, +)$, což je aditivní komutativní grupa celých čísel.

Oproti tomu struktura S_2 vytváří pouze komutativní aditivní pologrupu $(\mathbb{N}, +)$, protože v nosné množině (univerzu) neexistuje neutrální prvek (kromě axiomů pro rovnost zde lze použít pouze axiom SAG1 a dále SAG4).

Struktura S_3 umožňuje vytvořit komutativní multiplikativní monoid $(\mathbb{Z}, *)$, z axiomů pro grupy lze použít SAG1 (asociativní), SAG2 (existence neutrálního prvku) a SAG4 (je komutativní). Inverzní prvky vzhledem k násobeni existují jen pro dva prvky (které?), tedy axiom SAG3 nelze použít.

Struktury S_4 a S_5 jsou podobné – první určuje komutativní multiplikativní monoid $(\mathbb{R}, *)$, druhá komutativní multiplikativní grupu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$. V čem je rozdíl? U obou existuje neutrální prvek (1), ale pouze v druhém případě existuje ke každému prvku nosné množiny (univerza) inverzní prvek (k nule neexistuje, protože – jak dobře víme – nulou nelze dělit). Odlišují se tedy v jednom jediném axiomu, SAG3.

Příklad 2.3.3

Zatímco na číselných množinách obvykle zavádíme aritmetické operátory (pro sčítání, násobení apod.), na množinách množin $\mathcal{P}(M)$ využijeme operace průniku a sjednocení. Opět jde o binární funktory, které interpretujeme vhodnými funkcemi ze struktury. Pro některou (neprázdnou) množinu M vytvoříme strukturu $(\mathcal{P}(M), \{\Leftrightarrow, \subset\}, \{\cup, \cap\})$.

Jak průnik, tak i sjednocení splňují vlastnost asociativity (axiom SAG1), existence neutrálního prvku (pro průnik je to nosná množina M potenční množiny, obdoba „jedničky“ u násobení, pro sjednocení je neutrálním prvkem prázdná množina podobně jako nula u sčítání; axiom SAG2) a komutativity (axiom SAG4). Pouze k jednomu prvku však existuje inverzní prvek vzhledem ke sjednocení, a podobně je tomu i u průniku.

Proto uvedená struktura je pouze modelem teorie postavené na speciálních axiomech SAG1, SAG2, SAG4 a axiomech rovnosti SAR1–3. Z algebraického hlediska jsou $(\mathcal{P}(M), \cup)$ a $(\mathcal{P}(M), \cap)$ komutativní monoidy.

2.3.2 Teorie okruhů

V předchozím textu jsme měli vždy jen jednu operaci (v množině funkcí struktury pro interpretaci), podíváme se na strukturu kombinující dvě operace.

Z algebry víme, že *okruh* je algebraická struktura se dvěma binárními operacemi $(A, \mathrm{f}, \mathrm{g})$, kde

- (A, f) je komutativní grupa,
- (A, g) je pologrupa,
- operace f a g nad nosnou množinou A splňují vlastnost distributivity.

Formulujeme tyto požadavky pomocí speciálních axiomů, z nichž některé si vypůjčíme z předchozího textu, jsou v tabulce 2.5.

SAR1:	$\forall x (x = x)$	reflexivita rovnosti
SAR2:	$\forall x \forall y \Big((x = y) \rightarrow (y = x) \Big)$	symetrie rovnosti
SAR3:	$\forall x \forall y \forall z \Big((x = y) \,\&\, (y = z) \rightarrow (x = z) \Big)$	tranzitivita rovnosti
SAG1$_f$:	$\forall x \forall y \forall z \Big(\mathrm{f}\Big(x, \mathrm{f}(y, z)\Big) = \mathrm{f}\Big(\mathrm{f}(x, y), z\Big) \Big)$	asociativita operace f
SAG1$_g$:	$\forall x \forall y \forall z \Big(\mathrm{g}\Big(x, \mathrm{g}(y, z)\Big) = \mathrm{g}\Big(\mathrm{g}(x, y), z\Big) \Big)$	asociativita operace g
SAG2$_f$:	$\exists e \forall x \Big(\mathrm{f}(e, x) = \mathrm{f}(x, e) = x \Big)$	neutrální prvek
SAG3$_f$:	$\forall x \exists y \Big(\Big(\mathrm{f}(x, y) = e \Big) \,\&\, \Big(\mathrm{f}(y, x) = e \Big) \Big)$, kde e je neutrální prvek grupy	inverzní prvky
SAG4$_f$:	$\forall x \forall y \Big(f(x, y) = f(y, x) \Big)$	komutativita
SAD:	$\forall x \forall y \forall z \Big(\mathrm{g}\Big(x, \mathrm{f}(y, z)\Big) = \mathrm{f}\Big(\mathrm{g}(x, y), \mathrm{g}(x, z)\Big) \,\&\, \mathrm{g}\Big(\mathrm{f}(y, z), x\Big) = \mathrm{f}\Big(\mathrm{g}(y, x), \mathrm{g}(z, x)\Big) \Big)$	distributivita

Tabulka 2.5: Speciální axiomy teorie okruhů

Příklad 2.3.4

Pokud při interpretaci použijeme strukturu $S = (\mathbb{Z}, \{=\}, \{+, *\})$, kde v denotaci přiřadíme funktorům funkce $D(\mathrm{f}) = +$, $D(\mathrm{g}) = *$, získáme okruh $(\mathbb{Z}, +, *)$. Opravdu platí, že $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativní grupa a $(\mathbb{Z}, *)$ je pologrupa (operace násobení je na oboru celých čísel asociativní), a platí také zákon distributivity:

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\Big(x * (y + z) = x * y + x * z \Big) \;\&\; \Big((y + z) * x = y * x + z + x \Big) \Big)$$

Proto výše uvedená struktura S je modelem dané teorie.

Protože $(\mathbb{Z}, *)$ je komutativní algebraická struktura, bylo by možné axiom distributivity formulovat jednodušeji. Jak?

Úkoly

Vezměme interpretační strukturu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \{=, \leq\}, \{+, *\})$. Určete speciální axiomy teorie, jejímž je modelem. Jedná se o okruh?

2.4 Teorie svazů

2.4.1 Supremum a infimum

Teorii svazů (svaz je anglicky *lattice*) postavíme na teorii částečného uspořádání, navíc definujeme několik nových pojmů. Předpokládejme tedy, že množina M je částečně uspořádaná relací $\leq$, tedy je splněna vlastnost (speciální axiom) reflexivity, antisymetrie a tranzitivity částečného uspořádání SAO1, SAO2 a SAO3 (tabulka 2.3 na straně 7). Taktéž předpokládejme existenci speciálních axiomů reflexivity, symetrie a tranzitivity rovnosti.

Na množině M zavedeme binární relaci příslušnosti $\in$, která je definována tak, jak ji známe z matematiky (stačí si představit množinu a výčet jejích prvků).

Označme $\mathcal{P}(M)$ potenční množinu množiny M, tj. množinu všech jejích podmnožin. O co se jedná, máme vysvětleno už na straně 5, víme, že jde o množinu všech podmnožin množiny M.

Na množině $\mathcal{P}(M)$ zavedeme predikát ostrého uspořádání *inkluze* $\subset$, získáme uspořádanou strukturu množin $(\mathcal{P}(M), \subset)$. Strukturu pro interpretaci včetně komentáře najdeme v příkladu 2.2.3 na straně 6 i se zdůvodněním, proč se nejedná o úplné uspořádání. Použijeme speciální axiomy pro ostré uspořádání z předchozího textu SAU1 a SAU2, a také axiomy pro rovnost (SAR1 až SAR3).

Dále na této množině zavedeme binární funktory průniku a sjednocení množin, interpretované vhodnými funkcemi ze struktury tak, jak je v matematice běžné.

Definice 2.1 (Supremum a infimum) *Vezměme některou množinu $A \subset M$. Víme, že $A \in \mathcal{P}(M)$ (všimněte si odlišného symbolu v zápisu – jedná se o* podmnožinu *množiny M, ale* prvek *množiny $\mathcal{P}(M)$).*

Supremum *množiny A v množině M je prvek s s následujícími vlastnostmi:*

$$\sup_M(A) = s \quad \Leftrightarrow_{df} \quad (s \in M) \tag{2.3}$$

$$\& \quad \forall x\Big((x \in A) \rightarrow (x \leq s)\Big) \tag{2.4}$$

$$\& \quad \forall s'\Big((s' \in M) \,\&\, \forall y\big((y \in A) \rightarrow (y \leq s')\big) \rightarrow (s \leq s')\Big) \tag{2.5}$$

Infimum *množiny A v množině M je prvek i s následujícími vlastnostmi:*

$$\inf_M(A) = i \quad \Leftrightarrow_{df} \quad (i \in M) \tag{2.6}$$
$$\& \quad \forall x\big((x \in A) \rightarrow (i \leq x)\big) \tag{2.7}$$
$$\& \quad \forall i'\Big((i' \in M) \,\&\, \forall y\big((y \in A) \rightarrow (i' \leq y)\big) \rightarrow (i' \leq i)\Big) \tag{2.8}$$

Pokud jsou množiny A a M ekvivalentní či dokonce se shodují, není třeba psát spodní index u funkce suprema a infima, tedy například místo $\inf_M(M)$ lze psát pouze $\inf(M)$. Nosnou množinu také není třeba psát, pokud je zřejmá, předem známa.

Slovně: supremum množiny je její nejmenší horní ohraničení (závora), infimum množiny je její největší spodní ohraničení.

Rozeberme si tuto definici. Supremum s množiny A v M je především prvkem množiny M. Všimněte si, že vlastně vůbec nemusí jít o prvek množiny A, to si ukážeme na příkladech. Dále na řádku (2.4) je prvek s označen za horní ohraničení množiny A, tedy kterýkoliv prvek množiny A je menší nebo roven prvku s. Na posledním řádku (2.5) je určeno, že supremum je nejmenší horní ohraničení (tj. je menší nebo roven jakémukoliv jinému hornímu ohraničení, zde označovanému jako s'). Všimněte si, že pro s' je zde prakticky stejně definována vlastnost „je horním ohraničením“ jako pro s na předchozích dvou řádcích definice.

S infimem je to podobné. Jedná se o prvek množiny M, který je spodním ohraničením množiny A – podle řádku (2.7), a to největším spodním ohraničením – podle řádku (2.8).

Příklad 2.4.1

Podíváme se na supremum a infimum množiny přirozených čísel (bereme přirozená čísla bez nuly):
$\inf(\mathbb{N}) = 1$
$\sup(\mathbb{N})$ neexistuje

Vezměme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a její podmnožiny, které jsou určeny intervalem:

- $A_1 = \langle 25, \ldots, 30.1 \rangle$
  $\inf_{\mathbb{R}}(A_1) = 25$, $\sup_{\mathbb{R}}(A_1) = 30.1$
- $A_2 = \langle 25, \ldots, 30.1)$
  $\inf_{\mathbb{R}}(A_2) = 25$, $\sup_{\mathbb{R}}(A_2) = 30.1$
- $A_3 = (25, \ldots, 30.1)$
  $\inf_{\mathbb{R}}(A_3) = 25$, $\sup_{\mathbb{R}}(A_3) = 30.1$

Pro připomenutí: ostrá závorka znamená, že hraniční prvek uvedený u této závorky také patří do intervalu, kulatá závorka znamená, že daný hraniční prvek už do intervalu nepatří.

Ve všech třech případech je supremem množin A_1, A_2 a A_3 v množině $\mathbb{R}$ prvek 30.1, jejich infimem je prvek 25, třebaže supremum množiny A_2 do této množiny nepatří, do množiny A_3 dokonce nepatří její supremum ani infimum.

Pokud $M = \{a, b, c\}$ a $\mathcal{P}(M)$ je uspořádaná výše určenou relací inkluze $\subset$, tak
$\inf(\mathcal{P}(M)) = \emptyset$
$\sup(\mathcal{P}(M)) = \{a, b, c\}$

Příklad 2.4.2

Supremum a infimum lze definovat nejen pro (obecné) množiny, ale i pro dvojici prvků:
$\forall x \forall y \Big((x \leq y) \rightarrow (\sup\{x, y\} = y \ \ \& \ \inf\{x, y\} = x)\Big)$

Pokud jsou tyto dva prvky neporovnatelné, jejich supremum a infimum buď neexistuje, a nebo je to některý z prvků odlišných od x, y.

Jestliže jsou prvky univerza množiny (tj. pracujeme s potenční množinou a používáme operace sjednocení a průniku množin), pak lze supremum a infimum množin $A, B \subset \mathcal{P}(M)$ definovat následovně:
$\sup\{A, B\} = A \cup B$
$\inf\{A, B\} = A \cap B$

Úkoly

1. Vezměme množinu čísel $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a na definujme uspořádání $\preceq$ vztahem dělitelnosti:

   $x \preceq y \quad \Leftrightarrow_{df} \quad x|y$

   Hasseův diagram uspořádané struktury $(M, \preceq)$ jste už kreslili (v úkolu 2 na straně 8), tedy podle tohoto diagramu určete

$\inf\{1, 2\} =$	$\sup\{1, 2\} =$
$\inf\{2, 3\} =$	$\sup\{2, 3\} =$
$\inf\{2, 4\} =$	$\sup\{2, 4\} =$
$\inf\{5, 6\} =$	$\sup\{5, 6\} =$

2. Analyzujte uspořádání $\preceq$ z předchozího úkolu – zjistěte, zda je reflexivní, antisymetrické a tranzitivní (tj. které speciální axiomy teorie částečného uspořádání splňuje).

2.4.2 Svazy

Definice 2.2 (Svaz) *Nechť $(M, \leq)$ je částečně uspořádaná množina. Potom M je nosnou množinou svazu, jestliže $\forall x \forall y$ v množině M*

- $\exists \sup\{x, y\}$
- $\exists \inf\{x, y\}$

(každé dva prvky mají své supremum a infimum, jinými slovy – jsou porovnatelné). Na svazu jsou definovány operace průseku a spojení následovně:

- *průsek:* $x \wedge y \quad =_{df} \quad \inf\{x, y\}$
- *spojení:* $x \vee y \quad =_{df} \quad \sup\{x, y\}$

Trojice $(M, \wedge, \vee)$ tvoří svaz.

Všimněte si, že je sice vyžadována existence infima a suprema pro každou dvojici prvků z nosné množiny, ale není stanoveno, čemu konkrétně se infimum a supremum mají rovnat. Pokud jsou dva dané prvky porovnatelné, pak je zřejmé, že supremum je větší z nich a infimum ten menší, dokonce lze dokázat následující tvrzení:

$$\forall x \forall y \quad (x \leq y) \leftrightarrow (\sup\{x, y\} = y) \leftrightarrow (\inf\{x, y\} = x) \tag{2.9}$$

Operace průseku a spojení bylo možné výše uvedeným způsobem definovat, protože se jedná o *binární operace na dané množině* (to znamená, že pro jakoukoliv dvojici prvků z nosné množiny existuje jejich průsek a spojení, protože pro ně vždy existuje infimum a supremum).

Pokusme se svaz určit pomocí speciálních axiomů. Protože množina M má být částečně uspořádaná, potřebujeme speciální axiomy pro rovnost a částečné uspořádání. Dále je třeba formulovat speciální axiomy pro existenci suprema a infima. Operace průseku a spojení jsou pouze záležitostí struktury (modelu), ve speciálních axiomech se neobjeví. Množinu speciálních axiomů teorie svazů najdeme v tabulce 2.6.

Příklad 2.4.3

Binární operace je *idempotentní*, pokud vzhledem k ní jsou všechny prvky nosné množiny idempotentní. Zjistíme, jestli tuto vlastnost mají operace průseku a spojení.

Víme, že platí

$$\forall x \forall y \quad (x \leq y) \leftrightarrow (\sup\{x, y\} = y) \leftrightarrow (\inf\{x, y\} = x)$$

Pokud použijeme substituci $\{x/y\}$, tj. za y dosadíme x, získáme:

$$\forall x \quad (x \leq x) \leftrightarrow (\sup\{x, x\} = x) \leftrightarrow (\inf\{x, x\} = x)$$

SAR1:	$\forall x(x = x)$	axiom reflexivity rovnosti
SAR2:	$\forall x \forall y\Big((x = y) \to (y = x)\Big)$	axiom symetrie rovnosti
SAR3:	$\forall x \forall y \forall z\Big((x = y) \,\&\, (y = z) \to (x = z)\Big)$	axiom tranzitivity rovnosti
SAO1:	$\forall x(x \leq x)$	axiom reflexivity nerovnosti
SAO2:	$\forall x \forall y\Big((x \leq y) \,\&\, (y \leq x) \to (x = y)\Big)$	axiom antisymetrie nerovnosti
SAO3:	$\forall x \forall y \forall z\Big((x \leq y) \,\&\, (y \leq z) \to (x \leq z)\Big)$	axiom tranzitivity nerovnosti
SAS1:	$\forall x \forall y \exists s(s = \sup\{x, y\})$	existence suprema
SAS2:	$\forall x \forall y \exists i(i = \inf\{x, y\})$	existence infima

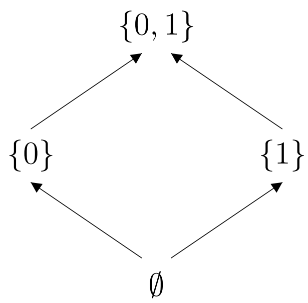
Tabulka 2.6: Speciální axiomy teorie svazů

Relace $\leq$ je reflexivní, proto je podformule $x \leq x$ interpretována hodnotou $true$. Z toho vyplývá, že hodnotou $true$ jsou interpretovány i formule $\sup\{x, x\} = x$ a $\inf\{x, x\} = x$.

Protože $x \wedge x = \inf\{x, x\} = x$ a $x \vee x = \sup\{x, x\} = x$, jsou operace průseku a spojení idempotentní.

Příklad 2.4.4

Pokud jsou dva prvky svazu neporovnatelné, infimum a supremum presto mohou existovat (respektive – musejí, jinak by nešlo o svaz).



Vezměme si například množinu $M = \{0, 1\}$ a sestrojme algebraickou strukturu $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Vpravo je Hasseův diagram této uspořádané množiny. Jedná se o svaz? Vidíme, že prvky $\{0\}$ a $\{1\}$ jsou neporovnatelné, ale platí:
$\inf\{\{0\}, \{1\}\} = \emptyset$
$\sup\{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1\}$
Pro supremum platí, že $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$ a $\{1\} \subseteq \{0, 1\}$ (tedy nalezený prvek je horním ohraničením) a zároveň se jedná o nejmenší horní ohraničení (ostatně, je to jediné horní ohraničení, tedy nemusíme ve zkoumání suprema pokračovat). S infimem je to podobné – prázdná množina je podmnožinou každé množiny, je tedy spodním ohraničením, a zároveň je to jediné (tudíž i nejmenší) spodní ohraničení.

Supremum a infimum existuje pro jakoukoliv dvojici prvků množiny $\mathcal{P}(M)$, proto se jedná o svaz.

2.4.3 Vlastnosti svazových operací

U albegraických operací běžně pracujeme s vlastnostmi asociativity, komutativity, distributivity a dalšími. Podíváme se, zda operace průseku a spojení ve svazu mají tyto vlastnosti také.

Příklad 2.4.5

To, že jsou operace průseku a spojení reflexivní, vyplývá přímo z jejich definice (protože jsou definovány na základě relace částečného uspořádání, která je reflexivní). Také vlastnost komutativity je splněna (opět to vyplývá z definice infima a suprema dvou prvků nosné množiny).

Zajímá nás, zda tyto operace splňují některé další vlastnosti, které známe u binárních operací, například vlastnost *asociativity*.

Chceme zjistit, zda platí $\forall x \forall y \forall z \;\; x \wedge (y \wedge z)$. Položme

- $v_1 = x \wedge (y \wedge z) = \inf\{x, \inf\{y, z\}\}$
- $v_2 = (x \wedge y) \wedge z = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$

Posloupnost důkazu je následující:

1.	$v_1 = \inf\{x, \inf\{y, z\}\}$	Př1
2.	$v_2 = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$	Př2
3.	$(v_1 \leq x)$ & $(v_1 \leq \inf\{y, z\})$	(z bodu 1 a definice infima)
4.	$v_1 \leq x$	EK(3)
5.	$v_1 \leq \inf\{y, z\}$	EK(3)
6.	$(v_1 \leq y)$ & $(v_1 \leq z)$	(z bodu 5 a definice infima)
7.	$v_1 \leq y$	EK(6)
8.	$v_1 \leq z$	EK(6)
9.	$v_1 \leq \inf\{x, y\}$	(z bodů 4 a 7, a definice infima)
10.	$v_1 \leq \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$	(z bodů 8 a 9, a definice infima)
	$v_1 \leq v_2$	

Dokázali jsme, že $v_1 \leq v_2$, zbývá dokázat i opačný vztah:

11.	$(v_2 \leq \inf\{x, y\})$ & $(v_2 \leq z)$	(z bodu 2 a definice infima)
12.	$v_2 \leq \inf\{x, y\}$	EK(11)
13.	$v_2 \leq z$	EK(11)
14.	$(v_2 \leq x)$ & $(v_2 \leq y)$	(z bodu 12 a definice infima)
15.	$v_2 \leq x$	EK(14)
16.	$v_2 \leq y$	EK(14)
17.	$v_2 \leq \inf\{y, z\}$	(z bodů 13 a 16, a definice infima)

18. $v_2 \leq \inf\{x, \inf\{y, z\}\}$ (z bodů 15 a 17, a definice infima)
    $v_2 \leq v_1$
19. $v_1 = v_2$ SAO2(10,18)

V posledním bodě jsme použili speciální axiom antisymetrie částečného uspořádání. Dokázali jsme, že levá strana se rovná pravé, a tedy operace průseku je asociativní. Pro operaci spojení by byl důkaz podobný, jen bychom využili vztah této operace k supremu.

Příklad 2.4.6

Ve svazu máme dvě operace – průsek a spojení. Zjistíme, jestli splňují *zákony absorpce*.

Zákony absorpce pro průsek a spojení můžeme formulovat takto:

$$\forall x \forall y \quad x \vee (y \wedge x) = x \tag{2.10}$$

$$\forall x \forall y \quad x \wedge (y \vee x) = x \tag{2.11}$$

Dokažme první uvedený vztah – (2.10). Pro zkrácení předpokládejme, že jsme $2\times$ použili pravidlo eliminace univerzálního kvantifikátoru, budeme tedy dokazovat $x \vee (y \wedge x) = x$. Označme $z = (y \wedge x) = \inf\{y, x\}$.

1. $z = \inf\{y, x\}$ Předpoklad
2. $z \leq x$ (z bodu 1 a definice infima)
3. $\sup\{x, z\} = x$ (z bodu 2 a definice suprema)

Poslední bod důkazu již lze zapsat ve formě $x = \sup\{x, \inf\{y, x\}\} = x \vee (y \wedge x)$, což je věta, kterou jsme dokazovali.

Věta (2.11) se dokazuje podobně.

Dosud jsme prováděli (nebo jsme měli za úkol provést) důkazy zvlášť pro průsek a zvlášť pro spojení. Průsek a spojení ve svazu však mají jednu zajímavou vlastnost – jsou navzájem *duální*. Svaz $S_1 = (M, \wedge, \vee)$ definujeme na uspořádané algebraické struktuře $(M, \leq)$, ale pokud vezmeme algebraickou strukturu $(M, \geq)$, získáme svaz $S_2 = (M, \vee, \wedge)$, který je ke svazu S_1 duální – zaměnili jsme operace spojení a průseku. Díky tomu není nutné tutéž vlastnost dokazovat pro obě operace, stačí pro jednu. Ale z cvičných důvodů budeme (i ve formě úkolů) důkazy provádět pro obě operace, i když to není nutné.

U dvojice operací lze kromě absorpce prověřit také vlastnost distributivity. Ovšem ve svazu distributivita neplatí obecně, tento vztah platí pouze v tzv. distributivních svazech.

Definice 2.3 (Distributivní svaz) *Svaz $S = (M, \wedge, \vee)$ je distributivní, pokud splňuje tuto vlastnost:*

$$\forall x \forall y \forall z \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{2.12}$$

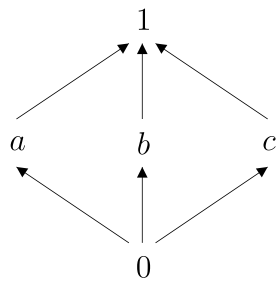
Vlastnost distributivity můžeme označit za speciální axiom SAD, ale mějme na paměti, že tento axiom patří pouze do teorií distributivních svazů, ne do teorií (obecných) svazů.

Je zřejmé, že v distributivním svazu platí i vztah podobný předchozímu, v němž zaměníme operace průseku a spojení.

Příklad 2.4.7

Existují svazy, které nejsou distributivní?

Na obrázku vpravo vidíme svaz nad pětiprvkovou množinou s naznačeným uspořádáním. Prvky a, b, c jsou všechny navzájem neporovnatelné, ale jejich infimum je prvek 0 a jejich supremum je prvek 1. Pro každou dvojici prvků existuje infimum a supremum, je to tedy svaz.



Zjistíme, jestli v tomto svazu platí vztah distributivity.

$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$

Vztah distributivity (speciální axiom SAD) neplatí, proto se nejedná o distributivní svaz. Z principu duality svazových operací vyplývá, že bychom nemuseli počítat všechny čtyři rovnice, stačí první dvě nebo poslední dvě.

Úkoly

1. Dokažte, že operace spojení ve svazu je asociativní (podobný důkaz pro průsek máte v příkladu 2.4.5).
2. Dokažte větu (2.11) o absorpci z příkladu 2.4.6.

Literatura

[1] DUŽÍ, M. *Matematická logika* [online]. Skripta VŠB-TU Ostrava.
URL: http://www.cs.vsb.cz/duzi/Matlogika.pdf [cit. 20. 02. 2009]

[2] KUČERA, R. Základy teorie svazů [online]. Skripta Přírodovědecké fakulty MU v Brně, Ústav matematiky a statistiky.
URL: http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/Svazy2010.pdf [cit. 13. 01. 2011]

[3] ČADA, R. – KAISER, T. – RYJÁČEK, Z. *Diskrétní matematika* [online]. 3. kapitola. Skripta Západočeské univerzity v Plzni, 2004. Dostupné na
http://www.cam.zcu.cz/~ryjacek/students/DMA/skripta/3.pdf [cit. 13. 01. 2011]

[4] BĚLOHLÁVEK, R. *Konceptuální svazy a formální konceptuální analýza* [online]. Katedra informatiky, Univerzita Palackého, Olomouc.
Dostupné na http://belohlavek.inf.upol.cz/publications/Bel_Ksfka.pdf [cit. 13. 01. 2011]

[5] ĎURÁKOVÁ, D. – SNÁŠEL, V. *Modelování hierarchické struktury odpovědi s využitím konceptuálních svazů* [online]. Katedra informatiky, FEI, VŠB-TU v Ostravě, 2002.
Dostupné na
http://gis.vsb.cz/GIS_Ostrava/GIS_Ova_2002/Sbornik/Referaty/durakovar.htm
[cit. 13. 01. 2011]