INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Šárka Vavrečková

Formální systémy

Hilbertovský a Gentzenovský

Slezská univerzita v Opavě
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě
Ústav informatiky

Opava 2010

Anotace: Tento dokument je doprovodným textem, který má usnadnit navázání na nové učivo především studentům doktorského studia. Věnujeme se zde Hilbertovskému a Gentzenovskému formálnímu systému.

Formální systémy Hilbertovský a Gentzenovský

RNDr. Šárka Vavrečková, Ph.D.

Ústav informatiky
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě
Slezská univerzita v Opavě
Bezručovo nám. 13, 746 01 Opava

Sázeno v systému LaTeX

Tato inovace předmětu Logika a logické programování (dodatečné studijní materiály o Hilbertovském a Gentzenovském formálním systému) je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ.1.07/2.3.00/0 9.0197, „Posílení konkurenceschopnosti výzkumu a vývoje informačních technologií v Moravskoslezském kraji“.

Obsah

Kapitola 1

Hilbertovský axiomatický systém

Tato kapitola pojednává o jednom z axiomatických formálních systémů, Hilbertovském axiomatickém systému. Jeho autorem je významný matematik z přelomu 19. a 20. století, David Hilbert. Hilbert se sice narodil v Rusku (v Kaliningradu), ale pracoval především v Německu, kde také vznikla většina jeho prací.

Hilbertovský axiomatický systém byl vytvořen spíše pro použití v algebře a disciplínách z ní odvozených přesto byl po dlouhou dobu jedním z nejznámějších a nejpoužívanějších axiomatických systémů své doby. Dodnes je známá Hilbertovská axiomatika geometrie.

V Hilbertovském axiomatickém systému provádíme pouze přímé důkazy, proto zde najdeme pouze definici (přímého) důkazu (příp. důkazu z předpokladů). Důsledkem tohoto faktu a také toho, že máme pouze jediné odvozovací pravidlo, je, že konstrukce důkazů je náročnější a delší než u Systému přirozené dedukce. Proto se zde mnohem více používají pomocná odvozovací pravidla, z nichž některá budou také dokázána.

Stejně jako u předchozí kapitoly, i zde se nejdřív budeme věnovat systému založeném na jazyce výrokové logiky, a pak teprve definujeme také Hilbertovský axiomatický systém predikátové logiky. Podíváme se také na alternativní definici důkazu, která je pro vytváření některých teorií výhodnější.

1.1 Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky

Jazyk Hilbertovského axiomatického systému výrokové logiky přejímáme z výrokové logiky, kromě spojek konjunkce a disjunkce (z logických spojek používáme pouze negaci a implikaci), značíme ho $L_{\mathcal{H}}$.

Logické axiomy jsou tři, jsou uvedeny v tabulce 1.1 na str. 1.

1.	$\vdash A \to (B \to A)$	A1
2.	$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	A2
3.	$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	A3

Tabulka 1.1: Axiomy Hilbertovského axiomatického systému výrokové logiky

Odvozovací pravidlo je pouze jedno, nazývá se Modus Ponens (MP):

$$A \to B, \quad A \quad \vdash \quad B \tag{1.1}$$

Definice 1.1 *Důkaz formule F z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_n$ je konečná posloupnost formulí $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jazyka $L_{\mathcal{H}}$, kde $F = A_m$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí pro A_i některá z těchto možností:*

- *$A_i \in \{P_1, \ldots, P_n\}$ (tj. je to některý z předpokladů),*
- *A_i je logický axiom,*
- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla Modus Ponens na některé dva předchozí členy posloupnosti.*

Důkaz formule F (tj. bez předpokladů) je definován stejně, jen $n = 0$.

Příklad 1.1

Dokažte platnost věty $A \to A$. Tuto větu budeme nazývat *věta o implikaci* a budeme značit VI.

1. $P \to ((P \to P) \to P))$	A1	$[A = P,$ $B = P \to P]$
2. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$	A2	$[A = P,$ $B = P \to P,$ $C = P]$
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$	MP(1,2)	
4. $P \to (P \to P))$	A1	$[A = P,$ $B = P]$
5. $P \to P$	MP(3,4)	

Věta 1.1 (Věta o dedukci)

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z \quad \Leftrightarrow \quad P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \to Z \tag{1.2}$$

Důkaz:

„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že platí $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \to Z$. Pak pro tento vztah existuje důkazová posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_m$, kde $A_m = P_n \to Z$. Důkaz výsledného vztahu vytvoříme přidáním několika členů na konec této posloupnosti:

1.	A_1	
$\ldots$		
$m-2.$	A_{m-2}	
$m-1.$	A_{m-1}	
$m.$	$P_n \to Z$	
$m+1.$	P_n	předpoklad
$m+2.$	Z	MP(m,$m+1$)

„$\Rightarrow$“: Jestliže $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z$, potom existuje důkaz formule Z z předpokladů $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$. Tímto důkazem je nějaká posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_m$, kde $Z = A_m$. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle délky posloupnosti důkazu (budeme postupovat od prvního členu posloupnosti krokem indukce až k poslednímu) a dokážeme, že pravdivost všech členů této posloupnosti je podmíněna platností P_n.

Báze indukce: První člen důkazu A_1 je buď logický axiom nebo jeden z předpokladů P_i pro $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ nebo samotná formule P_n. Pokud je to P_n, stačí dokázat větu $P_n \to P_n$, což bylo učiněno výše (viz str. 2). Jestliže je to logický axiom nebo jiný předpoklad, pak je důkaz následující:

1. A_1 axiom nebo předpoklad
2. $A_1 \to (P_n \to A_1)$ A1
3. $P_n \to A_1$ MP(1,2)

Předpoklad indukce: Nechť věta platí pro všechny členy posloupnosti až po k-tý člen, tedy všechny členy posloupnosti až ke k-tému mohou být podmíněny formulí P_n.

Krok indukce: Formule A_{k+1} je buď logickým axiomem, nebo některým předpokladem (včetně předpokladu P_n), nebo vznikla uplatněním pravidla Modus Ponens na některé dva předchozí členy posloupnosti. Budeme řešit pouze tento poslední případ, protože předchozí se řeší stejně jako v bázi indukce.

Nechť tedy formule A_{k+1} vznikla uplatněním MP na některé dva předchozí členy posloupnosti. Označme tyto členy A_i a A_j, $i \neq j$, kde $A_j = (A_i \to A_{k+1})$. Protože $i, j \leq k$, pro formule A_i a A_j je věta již dokázána, tedy ji na ně uplatníme a vzniklé formule použijeme jako první členy důkazu:

1. $P_n \to A_i$ Př1
2. $P_n \to (A_i \to A_{k+1})$ Př2
3. $(P_n \to (A_i \to A_{k+1})) \to ((P_n \to A_i) \to (P_n \to A_{k+1}))$ A2
4. $(P_n \to A_i) \to (P_n \to A_{k+1})$ MP(2,3)
5. $P_n \to A_{k+1}$ MP(1,4)

□

Poznámka: Stejně jako v Systému přirozené dedukce (viz skripta předmětu Logika a logické programování), pokud větu o dedukci použijeme rekurzívně n-krát, dostaneme ekvivalenci

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Z \quad \Leftrightarrow \quad \vdash P_1 \to (P_2 \to \ldots (P_n \to Z) \ldots) \tag{1.3}$$

Příklad 1.2

Dokažte platnost vztahu $B \vdash A \to B$

1. B Př1
2. $B \to (A \to B)$ A1
3. $A \to B$ MP(2,4)

Tento vztah je ekvivalentem pravidla ZI v Systému přirozené dedukce. Budeme ho nazývat *pomocné odvozovací pravidlo oslabení*, značíme PO.

Příklad 1.3

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$

1. $A \to B$ Př1
2. $B \to C$ Př2
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ A1 $[A = (B \to C), B = A]$
4. $A \to (B \to C)$ MP(2,3)
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ A2
6. $(A \to B) \to (A \to C)$ MP(4,5)
7. $A \to C$ MP(1,6)

Tento vztah je *pomocné odvozovací pravidlo tranzitivity implikace*, značíme TI. Pokud na toto pravidlo uplatníme větu o dedukci, máme také dokázánu platnost několika formulí, například
$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

Příklad 1.4

Dokažte platnost vztahu $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$

Důkaz lze provést prostým uplatněním věty o dedukci na axiom A3. Tento vztah nazýváme *pomocné odvozovací pravidlo kontrapozice*, značíme K.

Příklad 1.5

Dokažte platnost vztahu $\neg\neg P \vdash P$. Jde o *pomocné odvozovací pravidlo eliminace negace*, značíme EN.

1.	$\neg\neg P$	Př1
2.	$\neg\neg P \to (\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P)$	A1
3.	$\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P$	MP(1,2)
4.	$(\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P) \to (\neg P \to \neg\neg\neg P)$	A3
5.	$\neg P \to \neg\neg\neg P$	MP(3,4)
6.	$\neg\neg P \to P$	K(5)
7.	P	MP(1,6)

Příklad 1.6

Dokažte platnost vztahu $P \vdash \neg\neg P$.

1.	P	Př1
2.	$\neg\neg\neg P \to \neg P$	VD na pravidlo EN
3.	$P \to \neg\neg P$	K(2)
4.	$\neg\neg P$	MP(1,3)

Tento vztah nazýváme *pomocné odvozovací pravidlo zavedení negace*, značíme ZN.

Příklad 1.7

Dokažte platnost vztahu $A, \neg A \vdash B$

1.	A	Př1
2.	$\neg A$	Př2
3.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
4.	$\neg B \to \neg A$	MP(2,3)
5.	$A \to B$	K(4)
6.	B	MP(1,5)

Tento vztah budeme nazývat obdobně jako v Systému přirozené dedukce, *pomocné odvozovací pravidlo sporné množiny*, značíme SM.

Příklad 1.8

Dokažte platnost vztahu $P,\ \neg Q\ \vdash\ \neg(P \to Q)$

1.	P	Př1
2.	$\neg Q$	Př2
3.	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	VD na MP
4.	$(P \to Q) \to Q$	MP(1,3)
5.	$\neg Q \to \neg(P \to Q)$	ZN+K(4)
6.	$\neg(P \to Q)$	MP(2,5)

Věta 1.2 (Lemma o neutrální formuli)

$$A \to B,\ \neg A \to B \quad \vdash \quad B \tag{1.4}$$

Důkaz: Pokud platí věty v předpokladech, musí existovat jejich důkazy:

$C_1, C_2, \dots, C_{u-1}, C_u$, kde $C_u = A \to B$,
$D_1, D_2, \dots, D_{r-1}, D_r$, kde $D_r = \neg A \to B$.

Formule A je interpretována jako *true* (a) nebo *false* (b). V prvním případě přidáme k prvnímu důkazu formuli A, která je v tomto ohodnocení splnitelná (interpretována jako *true*), v druhém případě přidáme k druhému důkazu formuli $\neg A$.

(a) $I(A) = true$: důkazová posloupnost bude vypadat takto:

$C_1, C_2, \dots, C_{u-1}, A \to B, A, B$ (uplatníme pravidlo MP na $A \to B, A$, dostaneme formuli B).

(b) $I(A) = false$: důkazová posloupnost bude vypadat takto:

$D_1, D_2, \dots, D_{r-1}, D_r = \neg A \to B, \neg A, B$.

Můžeme si dovolit rozdělit důkaz na dva případy podle toho, ve kterých ohodnoceních je či není splnitelná, protože splnitelnost předpokladů podmiňuje splnitelnost závěru (stačí zjistit, zda je závěr splnitelný v ohodnoceních, ve kterých jsou splnitelné předpoklady). □

Poznámka: Tato věta je obdobou stejně pojmenovaného lemmatu pro Systém přirozené dedukce, také ji lze chápat jako „Jestliže lze formuli dokázat z některého předpokladu i jeho negace, můžeme z množiny předpokladů odstranit tento předpoklad i jeho negaci."

1.2 Vlastnosti Hilbertovského systému výrokové logiky

Stejně jako u Systému přirozené dedukce, i zde pro důkaz úplnosti potřebujeme dvě pomocné věty. První z nich, Lemma o neutrální formuli, jsme již dokázali na str. 5, druhá je následující:

Lemma 1.3 *Nechť F je formule obsahující právě výrokové proměnné $p_1, p_2, \dots, p_n$. Ve zvolené valuaci v označme:*

$F' = F$, *pokud* $I(F, v) = 1$,	$p_i' = p_i$, *pokud* $v(p_i) = 1$,
$F' = \neg F$, *pokud* $I(F, v) = 0$	$p_i' = \neg p_i$, *pokud* $v(p_i) = 0$ *pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$

Pak platí

$$p_1', p_2', \dots, p_n' \ \vdash\ F' \tag{1.5}$$

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí podle složitosti formule, bude hodně podobný důkazu obdobné věty pro Systém přirozené dedukce.

Báze indukce: $F = p$ (0 logických spojek)

$p' \vdash p'$ platí, protože jde o větu o implikaci ($\vdash A \to A$) s uplatněnou větou o dedukci.

Předpoklad indukce: předpokládejme, že věta platí pro formule B, C o složitosti nejvýše k:

$p_1', p_2', \ldots, p_n' \vdash B'$
$p_1', p_2', \ldots, p_n' \vdash C'$

Krok indukce: dokážeme, že věta platí pro formuli F hloubky $k + 1$.

a) $F = \neg B$, B je formule o složitosti k

   Máme dokázat, že platí $p_1', p_2', \ldots, p_n' \vdash (\neg B)'$. Protože platí předpoklad indukce, dokazujeme $B' \vdash (\neg B)'$.

   Jsou dvě možnosti:

   1) $I(B) = 0 \Rightarrow$ dokazujeme $\neg B \vdash \neg B$, což je opět věta o implikaci,
   2) $I(B) = 1 \Rightarrow$ dokazujeme $B \vdash \neg\neg B$, to je dokázáno na str. 4 jako pravidlo zavedení negace.

b) $F = B \to C$, B, C jsou formule složitosti nejvýše k. Pak pro jednotlivé valuace dokazujeme:

B	C	$B \to C$	*dokazujeme* $(B', C' \vdash A')$:	
0	0	1	$\neg B, \neg C \vdash B \to C$	①
0	1	1	$\neg B, C \vdash B \to C$	②
1	0	0	$B, \neg C \vdash \neg(B \to C)$	③
1	1	1	$B, C \vdash B \to C$	④

Tabulka 1.2: Určení tvrzení, která je třeba dokázat

①, ②: Dokazujeme $\neg B \vdash B \to C$, neboli $\neg B, B \vdash C$ (podle věty o dedukci) $\Rightarrow$ dokázáno, pravidlo sporné množiny (viz str. 4).

③: Tento vztah je dokázán na str. 5 jako věta $P, \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$.

④: Jedná se o uplatnění věty o dedukci na první axiom ve tvaru $C \to (B \to C)$.

Protože v Hilbertovském axiomatickém systému VL nepoužíváme žádné další spojky (resp. je možné tyto spojky dodefinovat pomocí negace a implikace), je důkaz hotov. □

Korektnost a úplnost Hilbertovského systému výrokové logiky jsou shrnuty v následující větě:

Věta 1.4 (Postova věta) *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \models A \tag{1.6}$$

Důkaz:
„⇒“ – korektnost

Je třeba dokázat korektnost logických axiomů a odvozovacího pravidla MP, a potom korektnost konstrukce důkazu (tedy definice důkazu).

$\vdash A \to (B \to A)$

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$A \to B, A \vdash B$

A	B	$A \to B$	A	B
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

Tabulka 1.3: Sémantické tabulky pro první axiom a odvozovací pravidlo MP

Korektnost logických axiomů a odvozovacího pravidla můžeme stejně jako v Systému přirozené dedukce dokázat sémantickými tabulkami, například pro první axiom a odvozovací pravidlo jsou tabulky v tab. 1.3.

Tyto tabulky je potřeba vytvořit i pro axiomy A2 a A3, to necháme na čtenáři.

Logický axiom je korektní, pokud jsou v posledním sloupci pouze hodnoty 1 (*true*), u odvozovacího pravidla (příp. u odvozovacích pravidel) stačí, když jsou v posledním sloupci hodnoty 1 na řádcích odpovídajících valuacím, ve kterých jsou splnitelné předpoklady (v případě Modus Ponens je to poslední řádek), odvozovací pravidlo tedy zachovává splnitelnost.

Korektnost konstrukce důkazu dokážeme matematickou indukcí podle pořadí členů v posloupnosti důkazu. Dokazujeme korektnost posloupnosti důkazu
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ podle definice na str. 1.

Báze indukce: První člen posloupnosti důkazu je podle definice buď logický axiom nebo předpoklad. Pokud je to logický axiom, jeho korektnost jsme již dokázali, předpoklad pouze omezuje nutnost splnitelnosti závěru pro daná ohodnocení.

Předpoklad indukce: Nechť je důkaz korektní až ke k-tému členu, tedy až po formuli A_k. To znamená, že všechny formule A_i pro $i \leq k$ jsou buď logicky platné nebo alespoň splnitelné ve všech ohodnoceních, ve kterých je splnitelná množina až dosud v posloupnosti uvedených předpokladů.

Krok indukce: Formule A_{k+1} je podle definice důkazu buď logický axiom nebo předpoklad nebo vznikla z předchozích členů posloupnosti uplatněním pravidla MP. První dvě možnosti jsou řešeny stejně jako v bázi indukce, pro třetí možnost předpokládejme, že A_{k+1} byla odvozena pravidlem MP z i-tého a j-tého členu posloupnosti, kde $i, j \leq k$, $i \neq j$, tedy pro oba tyto členy dokazovaný vztah již platí. Korektnost pravidla MP již byla dokázána, proto i formule A_{k+1} je splnitelná ve všech ohodnoceních, ve kterých je splnitelná množina až dosud v posloupnosti uvedených předpokladů.

Krok indukce budeme uplatňovat postupně na všechny členy důkazu až k poslednímu, kterým je dokazovaná věta.

„⇐“ – úplnost

Předpokládejme, že formule A je logicky platná. pak podle vztahu na str. 5 platí

$$p'_1, p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

Potom platí zároveň tyto věty:

$$\begin{aligned} p_1, p'_2, \ldots, p'_n &\vdash A \\ \neg p'_1, p'_2, \ldots, p'_n &\vdash A \end{aligned}$$

Podle lemmatu o neutrální formuli (viz str. 5) pak platí

$$p'_2, \ldots, p'_n \vdash A$$

Toto provedeme postupně pro všechny výrokové proměnné, které se ve formuli A vyskytují, důsledkem je pak dokazatelnost formule A v Hilbertovském systému. □

Věta 1.5 (Bezespornost systému) *Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky je bezesporný.*

Důkaz: Důkaz povedeme sporem.

Kdyby byl tento systém sporný, pak by v něm pro některou formuli A byla dokazatelná A i $\neg A$. Podle Postovy věty by pak platilo $\models A$ i $\models \neg A$, což není možné. Tedy Hilbertovský systém výrokové logiky je bezesporný. □

Věta 1.6 (Minimálnost systému) *Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky je minimální.*

Důkaz: *(nástin)* Množina $\mathcal{M}$ bude obsahovat axiomy A1, A2 a A3 a dále formuli

$$A \to ((A \to B) \to B)),$$

která je uplatněním věty o dedukci na pravidlo Modus Ponens.

Jeden prvek množiny, nazvěme ho P, znegujeme (tedy formuli P nahradíme v množině její negací $\neg P$) a zjistíme, zda je takto upravená množina formulí nesplnitelná. Pokud ano, znamená to, že formule P je odvoditelná z ostatních formulí množiny $\mathcal{M}$ (odvozená formule P je ve sporu s přidanou formulí $\neg P$) a je tedy nadbytečná. Nesplnitelnost zjišťujeme metodami sémantické analýzy.

Tento krok provedeme postupně pro všechny formule v množině $\mathcal{M}$. Když ani jedna z upravených množin formulí není nesplnitelná, pak je systém minimální. □

Poznámka: Při používání axiomatického systému obvykle stačí, aby byla minimální množina axiomů. Pak se minimálnost může dokazovat „uvnitř systému“ tak, že v množině axiomů jeden nahradíme jeho negací, a pak odvozujeme formální teorii[1] pomocí odvozovacích pravidel. Pokud dojdeme ke sporu, nahrazovaný axiom je nadbytečný a můžeme ho vyřadit (protože je odvoditelný z ostatních axiomů a pravidel).

1.3 Alternativní konstrukce důkazu

Definice 1.2 *Důkaz formule F z dokazatelných formulí je konečná posloupnost formulí $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dokazatelných v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky, kde $F = A_m$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí pro A_i některá z těchto možností:*

- *A_i je logický axiom,*
- *A_i je věta (pravidlo) Hilbertovského axiomatického systému výrokové logiky,*
- *A_i vznikla použitím věty o dedukci na některý předchozí člen posloupnosti,*
- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla Modus Ponens na některé dva předchozí členy posloupnosti.*

[1] Formální teorie je teorie budovaná bez speciálních axiomů, tedy pouze nad formálním systémem. Je to množina všech vět dokazatelných v tomto formálním systému, tedy včetně jeho axiomů.

Pod pojmem *formule dokazatelná v Hilbertovském systému výrokové logiky* zde budeme chápat vztah $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash F$, tedy nejen samotnou formuli, ale i předpoklady určující její splnitelnost. Na každém řádku musí být právě jeden symbol dokazatelnosti $\vdash$. Pokud použijeme kterékoliv pravidlo na předchozí členy posloupnosti důkazu, včetně pomocných (kromě věty o dedukci), musíme do množiny takto vytvořené formule zařadit předpoklady všech formulí, na které jsme pravidlo použili.

V tomto typu důkazu se s výhodou používá věta o dedukci, což si ukážeme na následujícím příkladu (je to důkaz pomocného odvozovacího pravidla tranzitivity implikace).

Příklad 1.9

Dokažte platnost vztahu $A \to B,\ B \to C \ \vdash\ A \to C$ (viz str. 3, pomocné odvozovací pravidlo tranzitivity implikace TI)

1. $\vdash\ (B \to C) \to (A \to (B \to C))$	A1
2. $B \to C\ \vdash\ \to A \to (B \to C)$	VD(1)
3. $\vdash\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	A2
4. $B \to C\ \vdash\ (A \to B) \to (A \to C)$	MP(2,3)
5. $A \to B, B \to C\ \vdash\ A \to C$	VD(4)

Příklad 1.10

Tentýž vztah můžeme dokázat také jinak, pouze s pomocí již dokázané formule $P \vdash P$, věty o dedukci a pravidla Modus Ponens:

1. $A \to B\ \vdash\ A \to B$	dokázaná formule
2. $B \to C\ \vdash\ B \to C$	dokázaná formule
3. $A \to B, A\ \vdash\ B$	VD(1)
4. $A \to B, A, B \to C\ \vdash\ C$	MP(2,3)
5. $A \to B, B \to C\ \vdash\ A \to C$	VD(4)

Příklad 1.11

Dokažte platnost vztahu $\mathcal{U} \vdash B \Rightarrow \mathcal{U}, A \vdash B$ (viz str. 3, pomocné odvozovací pravidlo oslabení PO)

První možnost:

1. $\mathcal{U}\ \vdash\ B$	Př1
2. $\vdash\ B \to (A \to B)$	A1
3. $\mathcal{U}\ \vdash\ A \to B$	MP(1,2)
4. $\mathcal{U}, A\ \vdash\ B$	VD(3)

Druhá možnost:

1. $\mathcal{U}\ \vdash\ B$	Př1
2. $\vdash\ B \to (A \to B)$	A1
3. $\mathcal{U}\ \vdash\ A \to B$	MP(1,2)
4. $A\ \vdash\ A$	dokázaná formule
5. $\mathcal{U}, A\ \vdash\ B$	MP(3,4)

Věta 1.7 *Ke každému důkazu formule z dokazatelných formulí existuje ekvivalentní důkaz z předpokladů.*

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Báze indukce: Prvním členem posloupnosti je buď logický axiom, nebo předpoklad nebo již dokázaná věta (pravidlo). Logický axiom je dokazatelný (sám ze sebe), také pro každou dokázanou větu existuje důkaz z předpokladů, uvedení této věty je pouze zkrácením celého důkazu. Předpoklady stejně jako u důkazu z předpokladů pouze omezují množinu valuací, ve kterých musí být výsledná formule splnitelná.

Předpoklad indukce: Předpokládejme, že věta platí až ke k-tému členu posloupnosti důkazu z dokazatelných formulí.

Krok indukce: Pro $k+1$-ní člen této posloupnosti platí jedna z těchto možností:

- je to logický axiom, předpoklad nebo již dokázaná věta. Zde postupujeme jako u báze indukce.
- tato formule vznikla uplatněním věty o dedukci na některý předchozí člen posloupnosti. Korektnost použití věty o dedukci vyplývá z důkazu této věty a z Postovy věty (z dokazatelné formule vznikne uplatněním VD opět dokazatelná formule).
- formule vznikla uplatněním pravidla Modus Ponens na některé předchozí dva členy posloupnosti. Protože MP zachovává splnitelnost, platí: jestliže $\mathcal{U}_1 \vdash A \to B$ a zároveň $\mathcal{U}_2 \vdash A$, pak také $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \vdash B$ (sjednocení množin předpokladů omezí množinu valuací, ve kterých musí být B splnitelná, na pouze ty valuace, ve kterých jsou splnitelné všechny předpoklady z obou množin). □

Tím je dokázána korektnost tohoto typu důkazu, tedy pokud je jeho použití pro danou formuli výhodnější, můžeme ho volně použít.

1.4 Hilbertovský axiomatický systém predikátové logiky

Jazyk Hilbertovského axiomatického systému predikátové logiky přejímáme z predikátové logiky prvního řádu, kromě spojek konjunkce a disjunkce a existenčního kvantifikátoru (existenční kvantifikátor lze definovat pomocí obecného kvantifikátoru a negace), značíme ho $L_{\mathcal{H}_1}$.

Logických axiomů je pět. První tři přejímáme z Hilbertovského systému výrokové logiky, zbývající dva jsou uvedeny v tabulce 1.4.

A1,A2,A3	Axiomy přejaté z Hilbertovského systému výrokové logiky, viz str. 1	
A4	$\vdash \forall x A \to A(x/t)$	A4 (axiom specifikace)
A5	$\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$	A5 (axiom kvantifikace implikace)

Tabulka 1.4: Axiomy Hilbertovského axiomatického systému predikátové logiky

Narozdíl od axiomů pro výrokovou logiku tyto axiomy mají svá *omezení*:

1) Pro axiom A4: term t musí být substituovatelný za x.
2) Pro axiom A5: x nesmí být volná proměnná v A.

Odvozovací pravidla jsou dvě – Modus Ponens definované vztahem 1.1 na str. 1, a dále odvozovací pravidlo generalizace (značíme G):

$$A \quad \vdash \quad \forall x A \tag{1.7}$$

Definice 1.3 *Důkaz formule F z předpokladů $P_1, P_2, \dots, P_n$ je konečná posloupnost formulí $A_1, \dots, A_m$ jazyka $L_{\mathcal{H}_1}$, kde $F = A_m$ a pro každé $A_i,\ i \in \{1, \dots, m\}$, platí některá z možností:*

- *$A_i \in \{P_1, \dots, P_n\}$ (tj. je to některý z předpokladů),*
- *A_i je logický axiom,*

- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla MP na některé předchozí členy posloupnosti,*
- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla G na některý předchozí člen posloupnosti.*

Důkaz formule F (tj. bez předpokladů) je definován stejně, jen $n = 0$.

Vše, co jsme definovali a dokázali v Hilbertovském axiomatickém systému výrokové logiky, přejímáme, a budeme se zabývat pouze větami, které se týkají predikátové logiky.

Příklad 1.12

Dokažte platnost vztahu $A \to B \;\vdash\; \forall x A \to \forall x B$

1.	$A \to B$	Př1
2.	$\forall x A \to A$	A4
3.	$\forall x A \to B$	TI(1,2)
4.	$\forall x(\forall x A \to B)$	G(3)
5.	$\forall x(\forall x A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$	A5
6.	$\forall x A \to \forall x B$	MP(4,5)

Příklad 1.13

Tentýž vztah dokážeme důkazem z dokazatelných formulí:

1.	$A \to B \;\vdash\; A \to B$	dokázaná formule
2.	$\vdash\; \forall x A \to A$	A4
3.	$A \to B \;\vdash\; \forall x A \to B$	TI(1,2)
4.	$A \to B, \forall x A \;\vdash\; B$	VD(3)
5.	$A \to B, \forall x A \;\vdash\; \forall x B$	G(4)
6.	$A \to B \;\vdash\; \forall x A \to \forall x B$	VD(5)

Příklad 1.14

Dokažte platnost vztahu $A \to B \;\vdash\; A \to \forall x B$ (x není volná v A)

1.	$A \to B$	Př1
2.	$\forall x(A \to B)$	G(1)
3.	$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$	A5
4.	$A \to \forall x B$	MP(2,3)

Toto je pomocné odvozovací pravidlo *zavedení obecného kvantifikátoru*, značíme Z$\forall$.

1.5 Vlastnosti Hilbertovského systému predikátové logiky

Opět dokážeme korektnost a úplnost systému.

Věta 1.8 *Formule dokazatelné v Hilbertovském axiomatickém systému predikátové logiky jsou právě logicky platné formule predikátové logiky, tedy pro každou formuli predikátové logiky platí*

$$\vdash A \quad\Leftrightarrow\quad \models A \tag{1.8}$$

Důkaz:
„$\Rightarrow$" – *korektnost*

Korektnost logických axiomů A1, A2 a A3 a odvozovacího pravidla MP již byla dokázána pro výrokovou logiku, rozšíření důkazu na predikátovou by bylo možné provést nepřímým důkazem. Dále je potřeba dokázat korektnost axiomů A4 a A5 a odvozovacího pravidla Generalizace. Důkaz korektnosti konstrukce důkazu můžeme také přejmout.

Axiom A4, $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ (důkaz sporem):

Označme a prvek univerza diskurzu, který vznikne vyhodnocením termu t ve struktuře $\mathcal{S}$. Jestliže $\forall x A(x) \ \vdash \ A(x/t)$ neplatí, znamená to, že formule $\forall x A(x)$ má v této struktuře hodnotu *true* a formule $A(x/t)$ hodnotu *false* (vyplývá z definice implikace). V tom případě ale $I(A(x/t)) = I(A(x/a)) = false$, což je ve sporu s platností formule $\forall x A(x)$.

Obdobně lze dokázat také platnost axiomu A5 a odvozovacího pravidla Generalizace.

„$\Leftarrow$" – *úplnost*

Máme dokazatelnou formuli predikátové logiky $\vdash A$. Podle této formule vytvoříme výrokovou formuli B tak, že provedeme skolemizaci, převedeme formuli A do klauzulární formy, oddělíme prefix s kvantifikátory a za atomické formule s (vázanými) predikátovými proměnnými dosadíme (substituujeme) výrokové proměnné. Pokud za různé atomické formule (lišící se predikátem nebo predikátovými proměnnými) dosadíme různé výrokové proměnné, stačí dokázat úplnost pro takto získanou formuli B, což jsme učinili dříve pro Hilbertovský axiomatický systém výrokové logiky.

Důkaz úplnosti Hilbertovského systému predikátové logiky jsme tedy tímto způsobem převedli na důkaz úplnosti Hilbertovského systému výrokové logiky. □

Poznámka: Pravidlo Generalizace se má správně psát takto: $\vdash A[\mathcal{S}] \Rightarrow \ \vdash \forall x A[\mathcal{S}]$, tedy splnitelnost A se vztahuje k určité struktuře. Neplatí však věta $\vdash A \to \forall x A$, viz důkaz níže. Proč tedy můžeme používat pravidlo Generalizace? Protože toto pravido sice nezachovává splnitelnost, ale zachovává alespoň logickou pravdivost – dokazatelnost (z dokazatelné formule vytvoří dokazatelnou formuli), což nám stačí. Jen si musíme dávat pozor na kombinování věty o dedukci a pravidla Generalizace.

Věta 1.9 *Neplatí* $\vdash A \to \forall x A$.

Důkaz: Nechťuniverzum diskurzu obsahuje prvky a, b (a případně i další) takové, že $I(A(x/a)) = true$ a $I(A(x/b)) = false$.[2] Pak ale není platná formule $\forall x A$ (protože A není interpretována jako *true* pro všechny hodnoty x, jen pro některé), a dokonce je kontradiktorická, tedy $I(\forall x A) = false$ pro jakékoliv ohodnocení. Ze sémantického významu implikace vyplývá, že $I((A \to \forall x A)(x/b)) = false$, tedy $A \to \forall x A$ nemůže být logicky platná. □

[2]Pro připomenutí: zápis $I(A(x/a))$ znamená, že ve formuli A dosadíme (substituujeme) za všechny výskyty predikátové proměnné x hodnotu a (zde se jedná o prvek univerza diskurzu).

Kapitola 2

Gentzenovský formální systém

Autorem Gentzenovského formálního systému je matematik Gerhard Gentzen (vlastně Gerhard Karl Erich Gentzen). Gentzen byl po několik let asistentem Davida Hilberta, po Hilbertově odchodu pokračoval v jeho práci a kromě jiného vytvořil formální systém postavený na odlišné bázi než původní Hilbertův.

Gentzenovský systém je uváděn jako předpokladový, v jiné literatuře jako axiomatický. Pokud jde o to, zda můžeme používat i jinou formu důkazu než důkaz přímý, pak v Gentzenovském systému je sice používán pouze přímý důkaz (příp. z předpokladů), ale protože postup důkazu formule bez předpokladů je vlastně duální k postupu konstrukce sémantického tabla dokazované formule, lze jako pomůcku nejdřív zkonstruovat tablo coby nepřímý důkaz a pak dualizací vytvořit přímý důkaz v Gentzenovském systému. Možná proto se tento systém pohybuje „na pomezí" mezi předpokladovými a axiomatickými systémy.

V této kapitole si nejdřív připomeneme proces dualizace, potom definujeme Gentzenovský systém výrokové logiky, dokážeme jeho korektnost a úplnost a pak totéž provedeme pro predikátovou logiku.

2.1 Dualizace

Podívejme se na následující dvě tabulky:

A	B	$A \,\&\, B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

U	V	$U \vee V$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabulka 2.1: Sémantická tabulka pro konjunkci a disjunkci

Jsou to tabulky pro konjunkci a disjunkci, které jistě každý zná. Když se pozorněji podíváme na obsah tabulek, zjistíme, že tam, kde je v první tabulce 0, je v druhé tabulce 1 a naopak. Proto o logických spojkách konjunkce a disjunkce říkáme, že jsou navzájem duální.

Pod pojmem dualizace obecně rozumíme dvojici prvků, které mají stejnou základní strukturu, ale jednotlivé odpovídající části této struktury jsou v určitém smyslu navzájem inverzní s tím, že podle jednoho prvku dokážeme sestrojit druhý a naopak. Dualizovaný prvek budeme odlišovat horním indexem ^{D}.

V případě duálních logických spojek konjunkce a disjunkce v tabulce 2.1 je dualizační operací (faktorem) operace negace. V tabulce pro disjunkci můžeme provést substituce

$U = A^D = \neg A$,
$V = B^D = \neg B$,
$(U \vee V) = (A \,\&\, B)^D = \neg(A \,\&\, B) = (\neg A \vee \neg B) = (A^D \vee B^D)$.

K formuli $A \,\&\, B$ je duální formule $\neg A \vee \neg B$. Pokud postup, který jsme použili na druhou tabulku, použijeme na tabulku první, zjistíme, že k formuli $U \vee V$ je duální formule $\neg U \,\&\, \neg V$.

Jak k dané formuli vytvořit duální formuli? Můžeme tuto formuli prostě znegovat. Pokud ale je formule v konjunktivní normální formě[1], máme práci mnohem jednodušší. Stačí všechny literály znegovat a zaměnit navzájem logické spojky konjunkce a disjunkce. Výsledná formule je v disjunktivní normální formě[2]. V případě predikátové logiky také můžeme dualizaci provést prostým znegováním formule.

Příklad 2.1

K formuli $(A \leftrightarrow B) \,\&\, C \,\&\, (C \rightarrow \neg B) \,\&\, A$ najděte duální formuli.

Formuli převedeme do KNF: $(\neg A \vee B) \,\&\, (\neg B \vee A) \,\&\, C \,\&\, (\neg C \vee \neg B) \,\&\, A$

Provedem dualizaci: $(A \,\&\, \neg B) \vee (B \,\&\, \neg A) \vee \neg C \vee (C \,\&\, B) \vee \neg A$

Všimněme si, že zatímco původní formule byla kontradikce, formule k ní duální, kterou jsme vytvořili, je tautologie (můžeme ověřit například sémantickým stromem).

Věta 2.1 *Pro každou formuli A platí: je-li A logicky platná, pak je A^D nesplnitelná, je-li A nesplnitelná, pak je A^D logicky platná.*

Důkaz: Platnost věty plyne ze samotného procesu dualizace, kdy formuli znegujeme. Negace logicky platné formule je formule nesplnitelná, negace nesplnitelné formule je formule logicky platná. □

2.2 Gentzenovský systém výrokové logiky

Gentzenovský systém budeme probírat pouze v základní formě, jako ukázku toho, že existují systémy s poněkud jednodušším způsobem konstrukce důkazu. Z toho důvodu si definujeme pouze přímý důkaz *bez předpokladů*, protože předpoklady znemožňují jednodušší metodu konstrukce důkazu a je potřeba postupovat „klasickou cestou“ stejně jako u dříve definovaných formálních systémů.

Jazyk Gentzenovského systému výrokové logiky budeme značit $L_{\mathcal{G}}$, přejímáme jazyk výrokové logiky včetně všech logických spojek. Kromě formulí samotných zde budeme pracovat s *množinami formulí*. Prvky množiny formulí jsou pochopitelně formule (může být ale i prázdná množina), ze syntaktického a sémantického hlediska je mezi formulemi v množině vztah disjunkce.

Logický axiom (schéma) je jediný, je to množina formulí $\mathcal{U}$ obsahující některou výrokovou proměnnou i její negaci – $\exists p : (p \in \mathcal{U}) \;\;\&\;\; (\neg p \in \mathcal{U})$. Protože je mezi prvky množiny formulí vztah disjunkce, množina $\mathcal{U}$ představuje formuli $p \vee \neg p \vee \ldots$, která je tautologie.

[1]Fromule výrokové logiky je v KNF, pokud je tvořena podformulemi spojenými konjunkcemi, v podformulích se vyskytují pouze disjunkce, a negace jsou pouze přímo u literálů. Pod pojmem literál rozumíme výrokovou proměnnou nebo její negaci.

[2]Formule výrokové logiky je v DNF, pokud je tvořena podformulemi spojenými disjunkcemi, v podformulích se vyskytují pouze konjunkce, a negace jsou pouze přímo u literálů.

Odvozovací pravidla jsou v tab. 2.2.

Název	*Předpis*	
α-pravidlo	$\mathcal{U} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \ \vdash \ \mathcal{U} \cup \{\alpha\}$	$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$ $= \neg(\neg\alpha_1 \,\&\, \neg\alpha_2)$ $= \neg\alpha_1 \to \alpha_2$
β-pravidlo	$\mathcal{U}_1 \cup \{\beta_1\}, \mathcal{U}_2 \cup \{\beta_2\} \ \vdash \ \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \{\beta\}$	$\beta = \beta_1 \,\&\, \beta_2$ $= \neg(\neg\beta_1 \vee \neg\beta_2)$ $= \neg(\beta_1 \to \neg\beta_2)$

Tabulka 2.2: Odvozovací pravidla v Gentzenovském systému výrokové logiky

Není náhoda, že odvozovací pravidla Gentzenovského systému jsou nazvána stejně jako pravidla používaná v sémantickém tablu. Konstrukce přímého důkazu je totiž v tomto systému duální ke konstrukci nepřímého důkazu pomocí sémantického tabla. Odvozovací pravidla systému jsou duální k pravidlům tabla (je zaměněna konjunkce a disjunkce a literály jsou znegovány – to znegování se v obecném předpisu neobjeví), a totéž platí i o axiomu a obecně o množinách formulí (zde jsou prvky množiny spojeny disjunkcí, v tablu je to konjunkce, zde vyžadujeme, aby byl axiom logicky platná množina, v listech sémantického tabla musí být nesplnitelná množina formulí).

Definice 2.1 *Důkaz formule F je konečná posloupnost množin formulí $A_1, A_2 \ldots, A_m$ jazyka $L_{\mathcal{G}}$, kde $A_m = \{F\}$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí pro A_i některá z možností:*

- *A_i je logický axiom,*
- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla (α, β) na předchozí členy posloupnosti.*

Při konstrukci důkazu můžeme jako pomůcku využít sémantické tablo:

- vytvoříme nepřímý důkaz formule pomocí sémantického tabla (tj. formuli negujeme a vytvoříme sémantické tablo pro tuto negaci),
- sestavíme *duální tablo* – sémantické tablo obrátíme listy vzhůru a kořenem dolů a všechny množiny formulí v uzlech tabla znegujeme (provedeme dualizaci formulí v množinách v uzlech tabla),
- množiny formulí v duálním tablu přepíšeme do řádkového důkazu tak, že postupujeme od listů stromu a množinu formulí každého uzlu zařadíme do důkazu tak, aby byla uvedena až po množinách formulí z předchůdců tohoto uzlu (tedy postupujeme od listů ke kořeni stromu).

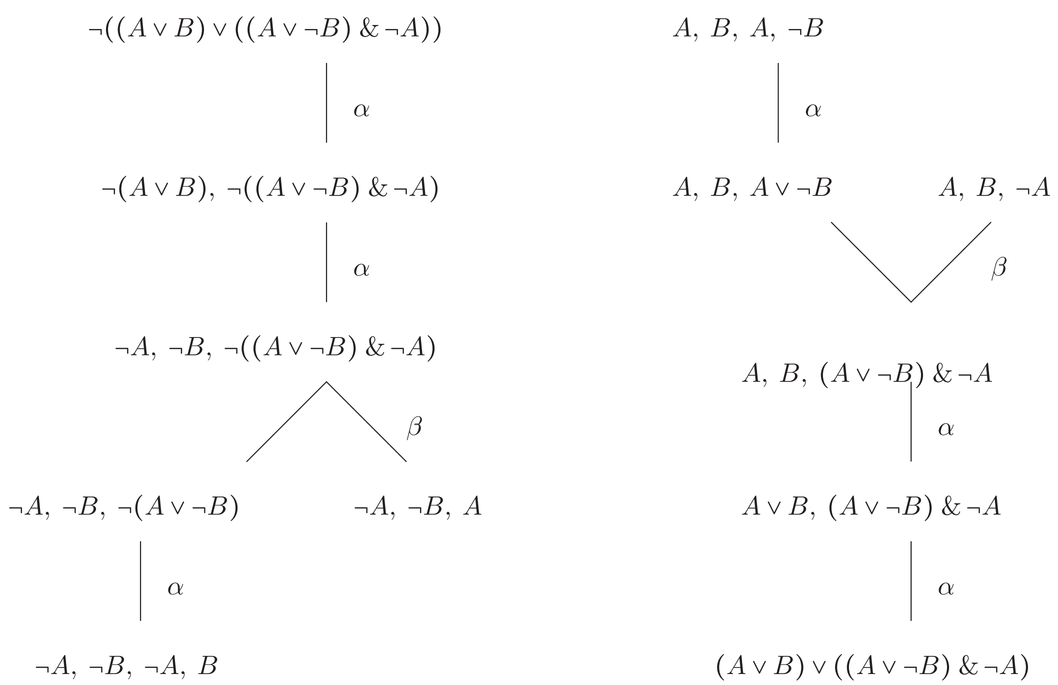
Příklad 2.2

Dokažte větu $(A \vee B) \vee ((A \vee \neg B) \,\&\, \neg A)$.

Nejdřív sestavíme pomocné struktury – sémantické tablo a duální tablo.

Řádkový důkaz:

1.	$A,\ B,\ A,\ \neg B$	axiom	4.	$A,\ B,\ (A \vee \neg B) \,\&\, \neg A$	$\beta_{2,3}$
2.	$A,\ B,\ A \vee \neg B$	α_1	5.	$A \vee B,\ (A \vee \neg B) \,\&\, \neg A$	α_4
3.	$A,\ B,\ \neg A$	axiom	6.	$(A \vee B) \vee ((A \vee \neg B) \,\&\, \neg A)$	α_5



Obrázek 2.1: Sémantické tablo negace formule a duální tablo formule

2.3 Korektnost a úplnost systému

Věta 2.2 *Formule dokazatelné v Gentzenovském systému výrokové logiky jsou právě logicky platné formule, tedy pro každou formuli výrokové logiky platí*

$$\vdash A \quad \Leftrightarrow \quad \vDash A \tag{2.1}$$

Důkaz:
„⇒“ – *korektnost*

Předpokládejme, že formule A je dokazatelná v $\mathcal{G}$. Potom existuje její řádkový důkaz a také duální tablo formule a sémantické tablo negace formule.

Korektnost konstrukce popírajícího sémantického tabla negace formule je dokázána v příkladu 2.3 na str. 17. Dále využijeme větu na str. 14, která říká, že formule duální k nesplnitelné formuli je logicky platná.

Sémantické tablo konstruujeme tak, že v jeho kořeni je negace dokazované formule. Pokud jsou v listech stromu nesplnitelné formule, dokázali jsme, že formule v kořeni stromu (tj. negace formule, se kterou pracujeme), je nesplnitelná.

Dualizací získáme duální tablo, které má ve svém kořeni dokazovanou formuli. Jestliže v listech sémantického tabla byly nesplnitelné formule, pak v listech duálního tabla jsou logicky platné formule a v jeho kořeni logicky platná formule.

Důkaz můžeme provést přímo pro řádkový důkaz v Gentzenovském systému. Pak stačí dokázat korektnost logického axiomu (již bylo naznačeno u jeho definice) a odvozovacích pravidel, a pak matematickou indukcí korektnost konstrukce přímého důkazu vycházející z jeho definice, stejně jako u dříve definovaných formálních systémů.

„⇐“ – *úplnost*

Jestliže A je logicky platná, pak $\neg A$ je nesplnitelná a sémantické tablo formule $\neg A$ se uzavře.

Potom existuje duální tablo, v jehož kořeni je formule A, a je ekvivalentní některému řádkovému důkazu formule A. Proto formule A je dokazatelná v $\mathcal{G}$. □

Příklad 2.3

Ukážeme si důkaz korektnosti a úplnosti sémantického tabla pro výrokovou logiku.

1. Korektnost

Předpokládejme, že formule F je dokazatelná sémantickým tablem. $\Longrightarrow$ Sémantické tablo formule $\neg F$ má všechny větve uzavřené.

Dále použijeme důkaz matematickou indukcí podle hloubky h podstromu sémantického tabla: *Báze indukce:* $h = 0$ (list stromu) – protože je každá větev uzavřená, v každém listu stromu se nachází komplementární pár literálů, označme je například $p, \neg p$. Mezi nimi je vztah konjunkce a platí $p \,\&\, \neg p = false \Longrightarrow$ formule v každém listu je kontradikce (nesplnitelná)[3].

Předpoklad indukce: Předpokládejme, že věta platí pro $h = k$, $k \geq 0$.

Krok indukce: mějme podstrom hloubky nejvýše $h = k + 1$. Jeho kořen má buď jeden (α-pravidlo) nebo dva (β-pravidlo) následníky.

α: kořen postromu je ohodnocen množinou formulí $\mathcal{U} \cup \{A_1 \& A_2\}$, jeho následník množinou formulí $\mathcal{U} \cup \{A_1, A_2\}$. Pro následníka platí indukční předpoklad (hloubka jeho postromu je k), tedy $\mathcal{U} \cup \{A_1, A_2\}$ je nesplnitelná, což znamená, že buď $\mathcal{U}$ nebo A_1 nebo A_2 je nesplnitelná.

Proto při přesunu o uzel výše je buď $\mathcal{U}$ nebo $A_1 \& A_2$ nesplnitelná, tedy množina formulí $\mathcal{U} \cup \{A_1 \& A_2\}$ je nesplnitelná.

β: kořen podstromu je ohodnocen množinou formulí $\mathcal{U} \cup \{A_1 \vee A_2\}$, jeden následník množinou formulí $\mathcal{U} \cup \{A_1\}$ a druhý $\mathcal{U} \cup \{A_2\}$. Oba následníci mají hloubku podstromu menší nebo rovnu k, tedy pro ně platí indukční předpoklad a jsou ohodnoceny nesplnitelnými množinami formulí.

Z toho vyplývá, že buď je nesplnitelná množina $\mathcal{U}$ a nebo jsou nesplnitelné obě formule A_1, A_2. Proto je nesplnitelná i množina formulí $\mathcal{U} \cup \{A_1 \vee A_2\}$ v uzlu s podstromem hloubky $k + 1$.

Pokud indukci uplatníme na celý strom sémantického tabla, zjistíme, že formule $\neg F$ v kořeni tohoto stromu je nesplnitelná, z toho vyplývá, že formule F je tautologie.

2. Úplnost

Pro důkaz korektnosti jsme použili techniku důkazu matematickou indukcí, zde použijeme důkaz sporem: abychom dokázali implikaci *logicky platná* $\longrightarrow$ *dokazatelná*, stačí dokázat ekvivalentní implikaci $\neg$*dokazatelná* $\longrightarrow$ $\neg$*logicky platná*.

Předpokládejme tedy, že formule F není dokazatelná sémantickým tablem. To znamená, že sémantické tablo formule $\neg F$ se neuzavře, v některém listu stromu tabla (nejméně jednom) je splnitelná množina formulí (stačí splnitelná pro nějakou valuaci, nemusí být logicky platná).

Když budeme postupovat obdobně jako u předchozí části důkazu po stromě od listů ke kořenům, pak alespoň v jedné větvi (z onoho „splnitelného listu“ ke kořeni stromu) budou všechny uzly ohodnoceny splnitelnými množinami formulí (to plyne z definice konjunkce a disjunkce), a tedy i kořen celého stromu je ohodnocen splnitelnou formulí, nikoliv kontradikcí (je to $\neg F$), proto formule F nemůže být logicky platná, není to tautologie.

[3] Přesněji jde o množinu formulí, která je pro dané ohodnocení splnitelná právě tehdy a jen tehdy, když jsou pro toto ohodnocení splnitelné všechny formule v množině, a množina $\{p, \neg p, \dots\}$ není splnitelná pro žádné ohodnocení.

2.4 Gentzenovský systém predikátové logiky

Jazyk Gentzenovského systému predikátové logiky přejímáme z jazyka predikátové logiky prvního řádu včetně všech logických spojek, stejně jako u výrokové logiky zde budeme pracovat s množinami formulí, ve kterých je mezi prvky (formulemi) vztah disjunkce.

Logický axiom (schéma) množina formulí $\mathcal{U}$ obsahující komplementární pár literálů některé atomické formule $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tedy $\{p(a_1, a_2, \ldots, a_n), \neg p(a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \subseteq \mathcal{U}$.

Odvozovací pravidla jsou v tab. 2.3.

Název	*Předpis*	
α-pravidlo	$\mathcal{U} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \ \vdash \ \mathcal{U} \cup \{\alpha\}$	$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$ $= \neg(\neg\alpha_1 \,\&\, \neg\alpha_2)$ $= \neg\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$
β-pravidlo	$\mathcal{U}_1 \cup \{\beta_1\}, \mathcal{U}_2 \cup \{\beta_2\} \ \vdash \ \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \{\beta\}$	$\beta = \beta_1 \,\&\, \beta_2$ $= \neg(\neg\beta_1 \vee \neg\beta_2)$ $= \neg(\beta_1 \rightarrow \neg\beta_2)$
γ-pravidlo	$\mathcal{U} \cup \{\exists A(x), A(a)\} \ \vdash \ \mathcal{U} \cup \{\exists A(x)\}$ $\mathcal{U} \cup \{\neg\forall A(x), \neg A(a)\} \ \vdash \ \mathcal{U} \cup \{\neg\forall A(x)\}$	
δ-pravidlo	$\mathcal{U} \cup \{A(a)\} \ \vdash \ \mathcal{U} \cup \{\forall A(x)\}$ $\mathcal{U} \cup \{\neg A(a)\} \ \vdash \ \mathcal{U} \cup \{\neg\exists A(x)\}$	

Tabulka 2.3: Odvozovací pravidla v Gentzenovském systému predikátové logiky

Definice 2.2 *Důkaz formule F je konečná posloupnost množin formulí $A_1, A_2 \ldots, A_m$, kde $A_m = \{F\}$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí pro A_i některá z možností:*

- *A_i je logický axiom,*
- *A_i vznikla použitím odvozovacího pravidla (α, β, γ, δ) na předchozí členy posloupnosti.*

Příklad 2.4

Dokažte větu $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$.

Uvedeme zde pouze řádkový důkaz, sémantické a duální tablo si čtenář může sestavit sám.

1. $A(m), \neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg A(m), \neg\forall x A(x), B(m)$ — axiom
2. $\neg B(m), \neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg A(m), \neg\forall x A(x), B(m)$ — axiom
3. $\neg(A(m) \rightarrow B(m)), \neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg A(m), \neg\forall x A(x), B(m)$ — β(1,2)
4. $\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg A(m), \neg\forall x A(x), B(m)$ — γ(3)
5. $\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg\forall x A(x), B(m)$ — γ(4)
6. $\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg\forall x A(x), \forall x B(x)$ — δ(5)
7. $\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ — α(6)
8. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$ — α(7)

Věta 2.3 *Formule dokazatelné v Gentzenovském systému predikátové logiky jsou právě logicky platné formule predikátové logiky prvního řádu.*

Důkaz: Je obdobný důkazu věty pro Gentzenovský systém výrokové logiky. □