

# Jazyky typu 0

## v Chomského hierarchii

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky, FPF SU Opava

Poslední aktualizace: 3. listopadu 2008

### Definice (Gramatika typu 0)

*Gramatika typu 0 je taková gramatika, jejíž pravidla jsou ve tvaru*

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*, \quad \beta \in (N \cup T)^*$$

### Definice (Kurodova normální forma pro gramatiky typu 0)

*Gramatika typu 0 je v KNF, jestliže pro všechna její pravidla  $\alpha \rightarrow \beta$  platí  $|\alpha| \leq 2$ ,  $|\beta| \leq 2$ .*

### Definice (Gramatika typu 0)

*Gramatika typu 0 je taková gramatika, jejíž pravidla jsou ve tvaru*

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*, \quad \beta \in (N \cup T)^*$$

### Definice (Kurodova normální forma pro gramatiky typu 0)

*Gramatika typu 0 je v KNF, jestliže pro všechna její pravidla*

$$\alpha \rightarrow \beta \text{ platí } |\alpha| \leq 2, \quad |\beta| \leq 2.$$

## Věta

*Ke každé gramatice  $G$  typu 0 lze sestavit ekvivalentní gramatiku  $G'$  v KNF.*

## Důkaz.

*Vstup: gramatika bez jednoduchých pravidel  $X \rightarrow Y$ ,  $X, Y \in N$*

- pravidla v bezkontextovém tvaru:  
použijeme algoritmus pro převod na Chomského NF.*
- pravidla, která nejsou bezkontextového typu:  
upravíme pravidla podle následujícího algoritmu.*

## Věta

*Ke každé gramatice  $G$  typu 0 lze sestavit ekvivalentní gramatiku  $G'$  v KNF.*

## Důkaz.

*Vstup: gramatika bez jednoduchých pravidel  $X \rightarrow Y$ ,  $X, Y \in N$*

- pravidla v bezkontextovém tvaru:  
použijeme algoritmus pro převod na Chomského NF.*
- pravidla, která nejsou bezkontextového typu:  
upravíme pravidla podle následujícího algoritmu.*

## Věta

*Ke každé gramatice  $G$  typu 0 lze sestavit ekvivalentní gramatiku  $G'$  v KNF.*

## Důkaz.

*Vstup: gramatika bez jednoduchých pravidel  $X \rightarrow Y$ ,  $X, Y \in N$*

- *pravidla v bezkontextovém tvaru:  
použijeme algoritmus pro převod na Chomského NF.*
- *pravidla, která nejsou bezkontextového typu:  
upravíme pravidla podle následujícího algoritmu.*

## Věta

*Ke každé gramatice  $G$  typu 0 lze sestrojít ekvivalentní gramatiku  $G'$  v KNF.*

## Důkaz.

*Vstup: gramatika bez jednoduchých pravidel  $X \rightarrow Y$ ,  $X, Y \in N$*

- pravidla v bezkontextovém tvaru:  
použijeme algoritmus pro převod na Chomského NF.*
- pravidla, která nejsou bezkontextového typu:  
upravíme pravidla podle následujícího algoritmu.*

## Příprava

Pro všechna pravidla:

- Všechny terminály (na levé i pravé straně pravidla)  $a \in T$  nahradíme „pomocnými“ neterminály  $N_a$ .
- Pro všechny neterminály vytvořené v předchozím bodu přidáme pravidlo  $N_a \rightarrow a$ .



## Příprava

Pro všechna pravidla:

- Všechny terminály (na levé i pravé straně pravidla)  $a \in T$  nahradíme „pomocnými“ neterminály  $N_a$ .
- Pro všechny neterminály vytvořené v předchozím bodu přidáme pravidlo  $N_a \rightarrow a$ .

## Pravidla bezkontextového typu

Pravidla  $A \rightarrow B_1B_2\dots B_n, n > 2$

## Pravidla bezkontextového typu

Pravidla  $A \rightarrow B_1B_2 \dots B_n$ ,  $n > 2$  nahradíme pravidly

$$A \rightarrow B_1X_1$$

$$X_1 \rightarrow B_2X_2$$

$$\vdots$$

$$X_{n-2} \rightarrow B_{n-1}B_n$$

Pravidla, kde  $|\alpha| = |\beta|$

Pravidla  $A_1A_2 \dots A_m \rightarrow B_1B_2 \dots B_m, m > 2$

Pravidla, kde  $|\alpha| = |\beta|$

Pravidla  $A_1A_2 \dots A_m \rightarrow B_1B_2 \dots B_m$ ,  $m > 2$  nahradíme pravidly

$$A_1A_2 \rightarrow B_1X_1$$

$$X_1A_3 \rightarrow B_2X_2$$

$$\vdots$$

$$X_{m-2}A_m \rightarrow B_{m-1}B_m$$

Nezkracující pravidla, která nejsou bezkontextová ( $2 < |\alpha| < |\beta|$ )

Pravidla  $A_1A_2 \dots A_m \rightarrow B_1B_2 \dots B_n$ ,  $2 < m < n$

Nezkracující pravidla, která nejsou bezkontextová ( $2 < |\alpha| < |\beta|$ )

Pravidla  $A_1A_2 \dots A_m \rightarrow B_1B_2 \dots B_n$ ,  $2 < m < n$  nahradíme pravidly

$$\begin{array}{ll}
 A_1A_2 & \rightarrow B_1X_1 & X_{m-1} & \rightarrow B_mX_m \\
 X_1A_3 & \rightarrow B_2X_2 & X_m & \rightarrow B_{m+1}X_{m+1} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 X_{m-2}A_m & \rightarrow B_{m-1}X_{m-1} & X_{n-2} & \rightarrow B_{n-1}B_n
 \end{array}$$

Zkracující pravidla, která nejsou bezkontextová ( $|\alpha| > |\beta|$ )

$$A_1 A_2 \dots A_m \rightarrow B_1 B_2 \dots B_n, \quad n < m$$



Zkracující pravidla, která nejsou bezkontextová ( $|\alpha| > |\beta|$ )

$A_1A_2 \dots A_m \rightarrow B_1B_2 \dots B_n$ ,  $n < m$  nahradíme pravidly

$$\begin{array}{ll}
 A_1A_2 \rightarrow B_1X_1 & X_nA_{n+2} \rightarrow X_{n+1} \\
 X_1A_3 \rightarrow B_2X_2 & \vdots \\
 \vdots & X_{m-3}A_{m-1} \rightarrow X_{m-2} \\
 X_{n-1}A_{n+1} \rightarrow B_nX_n & X_{m-2}A_m \rightarrow \varepsilon
 \end{array}$$

## Příklad

$$S \rightarrow AaBC$$

$$C \rightarrow cBAa \mid bS$$

$$AaBc \rightarrow d$$

$$BA \rightarrow abcd$$

*Předzpracování:*

$$S \rightarrow AN_aBC$$

$$N_a \rightarrow a$$

$$C \rightarrow N_cBAN_a \mid N_bS$$

$$N_b \rightarrow b$$

$$AN_aBN_c \rightarrow N_d$$

$$N_c \rightarrow c$$

$$BA \rightarrow N_aN_bN_cN_d$$

$$N_d \rightarrow d$$

## Příklad

$$S \rightarrow AaBC$$

$$C \rightarrow cBAa \mid bS$$

$$AaBc \rightarrow d$$

$$BA \rightarrow abcd$$

*Předzpracování:*

$$S \rightarrow AN_aBC$$

$$N_a \rightarrow a$$

$$C \rightarrow N_cBAN_a \mid N_bS$$

$$N_b \rightarrow b$$

$$AN_aBN_c \rightarrow N_d$$

$$N_c \rightarrow c$$

$$BA \rightarrow N_aN_bN_cN_d$$

$$N_d \rightarrow d$$

## Příklad

Pravidlo  $S \rightarrow AN_aBC$  nahradíme těmito pravidly:

## Příklad

Pravidlo  $S \rightarrow AN_aBC$  nahradíme těmito pravidly:

$$S \rightarrow AX_1$$

$$X_1 \rightarrow N_aX_2$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

## Příklad

Pravidlo  $S \rightarrow AN_aBC$  nahradíme těmito pravidly:

$$S \rightarrow AX_1$$

$$X_1 \rightarrow N_aX_2$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

Pravidlo  $C \rightarrow N_cBAN_a$  nahradíme těmito pravidly:

## Příklad

Pravidlo  $S \rightarrow AN_aBC$  nahradíme těmito pravidly:

$$S \rightarrow AX_1$$

$$X_1 \rightarrow N_aX_2$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

Pravidlo  $C \rightarrow N_cBAN_a$  nahradíme těmito pravidly:

$$C \rightarrow N_cX_3$$

$$X_3 \rightarrow BX_4$$

$$X_4 \rightarrow AN_a$$

## Příklad

Pravidlo  $S \rightarrow AN_aBC$  nahradíme těmito pravidly:

$$S \rightarrow AX_1$$

$$X_1 \rightarrow N_aX_2$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

Pravidlo  $C \rightarrow N_cBAN_a$  nahradíme těmito pravidly:

$$C \rightarrow N_cX_3$$

$$X_3 \rightarrow BX_4$$

$$X_4 \rightarrow AN_a$$

Pravidlo  $C \rightarrow N_bS$  necháme tak, jak je, odpovídá KNF.



## Příklad

Pravidlo  $AN_aBN_c \rightarrow N_d$  nahradíme těmito pravidly:

## Příklad

Pravidlo  $AN_aBN_c \rightarrow N_d$  nahradíme těmito pravidly:

$$AN_a \rightarrow N_dX_7$$

$$X_7B \rightarrow X_8$$

$$X_8N_c \rightarrow \varepsilon$$

## Příklad

Pravidlo  $AN_aBN_c \rightarrow N_d$  nahradíme těmito pravidly:

$$AN_a \rightarrow N_dX_7$$

$$X_7B \rightarrow X_8$$

$$X_8N_c \rightarrow \varepsilon$$

Pravidlo  $BA \rightarrow N_aN_bN_cN_d$  nahradíme těmito pravidly:

## Příklad

Pravidlo  $AN_aBN_c \rightarrow N_d$  nahradíme těmito pravidly:

$$AN_a \rightarrow N_dX_7$$

$$X_7B \rightarrow X_8$$

$$X_8N_c \rightarrow \varepsilon$$

Pravidlo  $BA \rightarrow N_aN_bN_cN_d$  nahradíme těmito pravidly:

$$BA \rightarrow N_aX_5$$

$$N_aX_5 \rightarrow N_bX_6$$

$$X_6 \rightarrow N_cN_d$$

## Příklad

Celá gramatika:

$$S \rightarrow AX_1$$

$$X_1 \rightarrow N_a X_2$$

$$X_2 \rightarrow BC$$

$$C \rightarrow N_c X_3$$

$$X_3 \rightarrow BX_4$$

$$X_4 \rightarrow AN_a$$

$$C \rightarrow N_b S$$

$$AN_a \rightarrow N_d X_7$$

$$X_7 B \rightarrow X_8$$

$$X_8 N_c \rightarrow \varepsilon$$

$$BA \rightarrow N_a X_5$$

$$N_a X_5 \rightarrow N_b X_6$$

$$X_6 \rightarrow N_c N_d$$

$$N_a \rightarrow a$$

$$N_b \rightarrow b$$

$$N_c \rightarrow c$$

$$N_d \rightarrow d$$

# Stroje rozpoznávající jazyky typu 0

## Možnosti:

- 1 Zásobníkový automat se dvěma zásobníky – rozšíříme zásobníkový automat o další zásobník,
- 2 Turingův stroj
  - pouze jediná páska, na ni je však možné také zapisovat,
  - čtecí a zápisová hlava se může pohybovat oběma směry.

# Stroje rozpoznávající jazyky typu 0

## Možnosti:

- 1 Zásobníkový automat se dvěma zásobníky – rozšíříme zásobníkový automat o další zásobník,
- 2 **Turingův stroj**
  - pouze jediná páska, na ni je však možné také zapisovat,
  - čtecí a zápisová hlava se může pohybovat oběma směry.

# Stroje rozpoznávající jazyky typu 0

## Možnosti:

- 1 Zásobníkový automat se dvěma zásobníky – rozšíříme zásobníkový automat o další zásobník,
- 2 Turingův stroj
  - pouze jediná páska, na ni je však možné také zapisovat,
  - čtecí a zápisová hlava se může pohybovat oběma směry.



# Stroje rozpoznávající jazyky typu 0

## Možnosti:

- 1 Zásobníkový automat se dvěma zásobníky – rozšíříme zásobníkový automat o další zásobník,
- 2 Turingův stroj
  - pouze jediná páska, na ni je však možné také zapisovat,
  - **čtecí a zápisová hlava se může pohybovat oběma směry.**

## Definice (Zásobníkový automat se dvěma zásobníky)

*Zásobníkový automat se dvěma zásobníky je*

$A_2 = (Q, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, q_0, Z_1, Z_2, F)$ , kde

- *abecedou prvního zásobníku je  $\Gamma_1$ ,*
- *abecedou druhého zásobníku je  $\Gamma_2$ ,*
- *$Z_1 \in \Gamma_1$  je počáteční zásobníkový symbol prvního zásobníku,*
- *$Z_2 \in \Gamma_2$  je počáteční zásobníkový symbol druhého zásobníku,*
- *$\delta$  funkce je definována takto:*  

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow Q \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

$$\delta(q_1, a, b_1, b_2) \in (q_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

$$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, b_1 \in \Gamma_1, b_2 \in \Gamma_2, \gamma_1 \in \Gamma_1^*, \gamma_2 \in \Gamma_2^*$$
- *vše ostatní se přejímá z definice zásobníkového automatu (s jedním zásobníkem).*

## Definice (Zásobníkový automat se dvěma zásobníky)

*Zásobníkový automat se dvěma zásobníky je*

$A_2 = (Q, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, q_0, Z_1, Z_2, F)$ , kde

- *abecedou prvního zásobníku je  $\Gamma_1$ ,*
- *abecedou druhého zásobníku je  $\Gamma_2$ ,*
- *$Z_1 \in \Gamma_1$  je počáteční zásobníkový symbol prvního zásobníku,*
- *$Z_2 \in \Gamma_2$  je počáteční zásobníkový symbol druhého zásobníku,*
- *$\delta$  funkce je definována takto:*

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow Q \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

$$\delta(q_1, a, b_1, b_2) \in (q_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

$$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, b_1 \in \Gamma_1, b_2 \in \Gamma_2, \gamma_1 \in \Gamma_1^*, \gamma_2 \in \Gamma_2^*$$
- *vše ostatní se přejímá z definice zásobníkového automatu (s jedním zásobníkem).*

## Definice (Zásobníkový automat se dvěma zásobníky)

*Zásobníkový automat se dvěma zásobníky je*

$A_2 = (Q, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, q_0, Z_1, Z_2, F)$ , kde

- *abecedou prvního zásobníku je  $\Gamma_1$ ,*
- *abecedou druhého zásobníku je  $\Gamma_2$ ,*
- *$Z_1 \in \Gamma_1$  je počáteční zásobníkový symbol prvního zásobníku,*
- *$Z_2 \in \Gamma_2$  je počáteční zásobníkový symbol druhého zásobníku,*
- *$\delta$  funkce je definována takto:*

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow Q \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

$$\delta(q_1, a, b_1, b_2) \in (q_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

$$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, b_1 \in \Gamma_1, b_2 \in \Gamma_2, \gamma_1 \in \Gamma_1^*, \gamma_2 \in \Gamma_2^*$$
- *vše ostatní se přejímá z definice zásobníkového automatu (s jedním zásobníkem).*

## Definice (Zásobníkový automat se dvěma zásobníky)

*Zásobníkový automat se dvěma zásobníky je*

$A_2 = (Q, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, q_0, Z_1, Z_2, F)$ , kde

- *abecedou prvního zásobníku je  $\Gamma_1$ ,*
- *abecedou druhého zásobníku je  $\Gamma_2$ ,*
- *$Z_1 \in \Gamma_1$  je počáteční zásobníkový symbol prvního zásobníku,*
- *$Z_2 \in \Gamma_2$  je počáteční zásobníkový symbol druhého zásobníku,*

- *$\delta$  funkce je definována takto:*

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow Q \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

$$\delta(q_1, a, b_1, b_2) \in (q_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

$$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, b_1 \in \Gamma_1, b_2 \in \Gamma_2, \gamma_1 \in \Gamma_1^*, \gamma_2 \in \Gamma_2^*$$

- *vše ostatní se přejímá z definice zásobníkového automatu (s jedním zásobníkem).*

## Definice (Zásobníkový automat se dvěma zásobníky)

*Zásobníkový automat se dvěma zásobníky je*

$A_2 = (Q, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, q_0, Z_1, Z_2, F)$ , kde

- *abecedou prvního zásobníku je  $\Gamma_1$ ,*
- *abecedou druhého zásobníku je  $\Gamma_2$ ,*
- *$Z_1 \in \Gamma_1$  je počáteční zásobníkový symbol prvního zásobníku,*
- *$Z_2 \in \Gamma_2$  je počáteční zásobníkový symbol druhého zásobníku,*

- *$\delta$  funkce je definována takto:*

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow Q \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

$$\delta(q_1, a, b_1, b_2) \in (q_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

$$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, b_1 \in \Gamma_1, b_2 \in \Gamma_2, \gamma_1 \in \Gamma_1^*, \gamma_2 \in \Gamma_2^*$$

- *vše ostatní se přejímá z definice zásobníkového automatu (s jedním zásobníkem).*

## Definice (Konfigurace a přechod mezi konfiguracemi)

*Konfigurace zásobníkového automatu se dvěma zásobníky je*

$$(q, w, \gamma_1, \gamma_2) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

- ① stav,
- ② nepřechtená část vstupu,
- ③ obsah prvního zásobníku,
- ④ obsah druhého zásobníku.

*Přechod mezi konfiguracemi:*

$$\begin{aligned} (q_i, a\alpha, b_1\gamma_1, b_2\gamma_2) &\vdash (q_j, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2) \\ &\iff \\ \delta(q_i, a, b_1, b_2) &\ni (q_j, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

## Definice (Konfigurace a přechod mezi konfiguracemi)

*Konfigurace zásobníkového automatu se dvěma zásobníky je*

$$(q, w, \gamma_1, \gamma_2) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

- ① *stav,*
- ② *nepřečtená část vstupu,*
- ③ *obsah prvního zásobníku,*
- ④ *obsah druhého zásobníku.*

*Přechod mezi konfiguracemi:*

$$\begin{aligned} (q_i, a\alpha, b_1\gamma_1, b_2\gamma_2) &\vdash (q_j, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2) \\ &\iff \\ \delta(q_i, a, b_1, b_2) &\ni (q_j, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$



## Definice (Konfigurace a přechod mezi konfiguracemi)

*Konfigurace zásobníkového automatu se dvěma zásobníky je*

$$(q, w, \gamma_1, \gamma_2) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

- 1 stav,
- 2 *nepřečtená část vstupu,*
- 3 obsah prvního zásobníku,
- 4 obsah druhého zásobníku.

*Přechod mezi konfiguracemi:*

$$\begin{aligned} (q_i, a\alpha, b_1\gamma_1, b_2\gamma_2) &\vdash (q_j, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2) \\ &\iff \\ \delta(q_i, a, b_1, b_2) &\ni (q_j, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

## Definice (Konfigurace a přechod mezi konfiguracemi)

*Konfigurace zásobníkového automatu se dvěma zásobníky je*

$$(q, w, \gamma_1, \gamma_2) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

- 1 stav,
- 2 nepřechtená část vstupu,
- 3 obsah prvního zásobníku,
- 4 obsah druhého zásobníku.

*Přechod mezi konfiguracemi:*

$$(q_i, a\alpha, b_1\gamma_1, b_2\gamma_2) \vdash (q_j, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2)$$

$$\iff$$

$$\delta(q_i, a, b_1, b_2) \ni (q_j, \beta_1, \beta_2)$$

## Definice (Konfigurace a přechod mezi konfiguracemi)

*Konfigurace zásobníkového automatu se dvěma zásobníky je*

$$(q, w, \gamma_1, \gamma_2) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

- ① stav,
- ② nepřechtená část vstupu,
- ③ obsah prvního zásobníku,
- ④ obsah druhého zásobníku.

*Přechod mezi konfiguracemi:*

$$\begin{aligned} (q_i, a\alpha, b_1\gamma_1, b_2\gamma_2) &\vdash (q_j, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2) \\ &\iff \\ \delta(q_i, a, b_1, b_2) &\ni (q_j, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

## Definice (Konfigurace a přechod mezi konfiguracemi)

*Konfigurace zásobníkového automatu se dvěma zásobníky je*

$$(q, w, \gamma_1, \gamma_2) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$$

- ① stav,
- ② nepřechtená část vstupu,
- ③ obsah prvního zásobníku,
- ④ obsah druhého zásobníku.

*Přechod mezi konfiguracemi:*

$$\begin{aligned} (q_i, a\alpha, b_1\gamma_1, b_2\gamma_2) &\vdash (q_j, \beta_1\gamma_1, \beta_2\gamma_2) \\ &\iff \\ \delta(q_i, a, b_1, b_2) &\ni (q_j, \beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

## Příklad

Vytvoříme zásobníkový automat se dvěma zásobníky pro jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, Z_1\}, \{b, Z_2\}, \delta, Z_1, Z_2, \emptyset)$$

$\delta$  funkce pracuje takto:

- v první fázi (stav  $q_0$ ) načítáme symboly  $a$  a ukládáme je do prvního zásobníku,
- v druhé fázi (stav  $q_1$ ) načítáme symboly  $b$ , přitom vyjímáme z prvního zásobníku symboly  $a$  (tak je zajištěn stejný počet  $a$  a  $b$ ) a zároveň ukládáme symboly  $b$  do druhého zásobníku,
- v třetí fázi (stav  $q_2$ ) musí již být první zásobník prázdný, načítáme ze vstupu symboly  $c$  a zároveň vyjímáme z druhého zásobníku symboly  $b$  (tak je zajištěn stejný počet  $b$  a  $c$ ).

## Příklad

Vytvoříme zásobníkový automat se dvěma zásobníky pro jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, Z_1\}, \{b, Z_2\}, \delta, Z_1, Z_2, \emptyset)$$

$\delta$  funkce pracuje takto:

- v první fázi (stav  $q_0$ ) načítáme symboly  $a$  a ukládáme je do prvního zásobníku,
- v druhé fázi (stav  $q_1$ ) načítáme symboly  $b$ , přitom vyjímáme z prvního zásobníku symboly  $a$  (tak je zajištěn stejný počet  $a$  a  $b$ ) a zároveň ukládáme symboly  $b$  do druhého zásobníku,
- v třetí fázi (stav  $q_2$ ) musí již být první zásobník prázdný, načítáme ze vstupu symboly  $c$  a zároveň vyjímáme z druhého zásobníku symboly  $b$  (tak je zajištěn stejný počet  $b$  a  $c$ ).

## Příklad

Vytvoříme zásobníkový automat se dvěma zásobníky pro jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, Z_1\}, \{b, Z_2\}, \delta, Z_1, Z_2, \emptyset)$$

$\delta$  funkce pracuje takto:

- v první fázi (stav  $q_0$ ) načítáme symboly  $a$  a ukládáme je do prvního zásobníku,
- v druhé fázi (stav  $q_1$ ) načítáme symboly  $b$ , přitom vyjímáme z prvního zásobníku symboly  $a$  (tak je zajištěn stejný počet  $a$  a  $b$ ) a zároveň ukládáme symboly  $b$  do druhého zásobníku,
- v třetí fázi (stav  $q_2$ ) musí již být první zásobník prázdný, načítáme ze vstupu symboly  $c$  a zároveň vyjímáme z druhého zásobníku symboly  $b$  (tak je zajištěn stejný počet  $b$  a  $c$ ).

## Příklad

Vytvoříme zásobníkový automat se dvěma zásobníky pro jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, Z_1\}, \{b, Z_2\}, \delta, Z_1, Z_2, \emptyset)$$

$\delta$  funkce pracuje takto:

- v první fázi (stav  $q_0$ ) načítáme symboly  $a$  a ukládáme je do prvního zásobníku,
- v druhé fázi (stav  $q_1$ ) načítáme symboly  $b$ , přitom vyjímáme z prvního zásobníku symboly  $a$  (tak je zajištěn stejný počet  $a$  a  $b$ ) a zároveň ukládáme symboly  $b$  do druhého zásobníku,
- v třetí fázi (stav  $q_2$ ) musí již být první zásobník prázdný, načítáme ze vstupu symboly  $c$  a zároveň vyjímáme z druhého zásobníku symboly  $b$  (tak je zajištěn stejný počet  $b$  a  $c$ ).



## Příklad

Vytvoříme zásobníkový automat se dvěma zásobníky pro jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, Z_1\}, \{b, Z_2\}, \delta, Z_1, Z_2, \emptyset)$$

$\delta$  funkce pracuje takto:

- v první fázi (stav  $q_0$ ) načítáme symboly  $a$  a ukládáme je do prvního zásobníku,
- v druhé fázi (stav  $q_1$ ) načítáme symboly  $b$ , přitom vyjímáme z prvního zásobníku symboly  $a$  (tak je zajištěn stejný počet  $a$  a  $b$ ) a zároveň ukládáme symboly  $b$  do druhého zásobníku,
- v třetí fázi (stav  $q_2$ ) musí již být první zásobník prázdný, načítáme ze vstupu symboly  $c$  a zároveň vyjímáme z druhého zásobníku symboly  $b$  (tak je zajištěn stejný počet  $b$  a  $c$ ).

## Příklad

Vytvoříme zásobníkový automat se dvěma zásobníky pro jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{a, Z_1\}, \{b, Z_2\}, \delta, Z_1, Z_2, \emptyset)$$

$\delta$  funkce pracuje takto:

- v první fázi (stav  $q_0$ ) načítáme symboly  $a$  a ukládáme je do prvního zásobníku,
- v druhé fázi (stav  $q_1$ ) načítáme symboly  $b$ , přitom vyjímáme z prvního zásobníku symboly  $a$  (tak je zajištěn stejný počet  $a$  a  $b$ ) a zároveň ukládáme symboly  $b$  do druhého zásobníku,
- v třetí fázi (stav  $q_2$ ) musí již být první zásobník prázdný, načítáme ze vstupu symboly  $c$  a zároveň vyjímáme z druhého zásobníku symboly  $b$  (tak je zajištěn stejný počet  $b$  a  $c$ ).

## Příklad

$$\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) = (q_0, aZ_1, Z_2)$$

$$\delta(q_0, a, a, Z_2) = (q_0, aa, Z_2)$$

$$\delta(q_0, b, a, Z_2) = (q_1, \varepsilon, bZ_2)$$

$$\delta(q_1, b, a, b) = (q_1, \varepsilon, bb)$$

$$\delta(q_1, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Ukázka rozpoznání slova *aabbcc*:

$$(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash$$

$$\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash$$

$$\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

## Příklad

$$\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) = (q_0, aZ_1, Z_2)$$

$$\delta(q_0, a, a, Z_2) = (q_0, aa, Z_2)$$

$$\delta(q_0, b, a, Z_2) = (q_1, \varepsilon, bZ_2)$$

$$\delta(q_1, b, a, b) = (q_1, \varepsilon, bb)$$

$$\delta(q_1, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Ukázka rozpoznání slova *aabbcc*:

$$(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash$$

$$\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash$$

$$\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

## Příklad

$$\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) = (q_0, aZ_1, Z_2)$$

$$\delta(q_0, a, a, Z_2) = (q_0, aa, Z_2)$$

$$\delta(q_0, b, a, Z_2) = (q_1, \varepsilon, bZ_2)$$

$$\delta(q_1, b, a, b) = (q_1, \varepsilon, bb)$$

$$\delta(q_1, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Ukázka rozpoznání slova *aabbcc*:

$$(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash$$

$$\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash$$

$$\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

## Příklad

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) &= (q_0, aZ_1, Z_2) \\
\delta(q_0, a, a, Z_2) &= (q_0, aa, Z_2) \\
\delta(q_0, b, a, Z_2) &= (q_1, \varepsilon, bZ_2) \\
\delta(q_1, b, a, b) &= (q_1, \varepsilon, bb) \\
\delta(q_1, c, Z_1, b) &= (q_2, Z_1, \varepsilon) \\
\delta(q_2, c, Z_1, b) &= (q_2, Z_1, \varepsilon) \\
\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) &= (q_0, \varepsilon, \varepsilon) \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) &= (q_2, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Ukázka rozpoznání slova *aabbcc*:

$$\begin{aligned}
&(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash \\
&\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash \\
&\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}$$

## Příklad

$$\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) = (q_0, aZ_1, Z_2)$$

$$\delta(q_0, a, a, Z_2) = (q_0, aa, Z_2)$$

$$\delta(q_0, b, a, Z_2) = (q_1, \varepsilon, bZ_2)$$

$$\delta(q_1, b, a, b) = (q_1, \varepsilon, bb)$$

$$\delta(q_1, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Ukázka rozpoznání slova  $aabbcc$ :

$$(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash$$

$$\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash$$

$$\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

## Příklad

$$\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) = (q_0, aZ_1, Z_2)$$

$$\delta(q_0, a, a, Z_2) = (q_0, aa, Z_2)$$

$$\delta(q_0, b, a, Z_2) = (q_1, \varepsilon, bZ_2)$$

$$\delta(q_1, b, a, b) = (q_1, \varepsilon, bb)$$

$$\delta(q_1, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Ukázka rozpoznání slova  $aabbcc$ :

$$(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash$$

$$\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash$$

$$\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$



## Příklad

$$\delta(q_0, a, Z_1, Z_2) = (q_0, aZ_1, Z_2)$$

$$\delta(q_0, a, a, Z_2) = (q_0, aa, Z_2)$$

$$\delta(q_0, b, a, Z_2) = (q_1, \varepsilon, bZ_2)$$

$$\delta(q_1, b, a, b) = (q_1, \varepsilon, bb)$$

$$\delta(q_1, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, c, Z_1, b) = (q_2, Z_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) = (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Ukázka rozpoznání slova  $aabbcc$ :

$$(q_0, aabbcc, Z_1, Z_2) \vdash (q_0, abbcc, aZ_1, Z_2) \vdash$$

$$\vdash (q_0, bbcc, aaZ_1, Z_2) \vdash (q_1, bcc, aZ_1, bZ_2) \vdash$$

$$\vdash (q_1, cc, Z_1, bbZ_2) \vdash (q_2, c, Z_1, bZ_2) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_1, Z_2) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

## Jiné:

$$L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

- ve stavu  $q_0$  načítá první polovinu slova a ukládá do prvního zásobníku, po načtení prvního  $w$  je v tomto zásobníku slovo  $w^R$ ,
- ve stavu  $q_1$  ne nepoužívá vstupní pásku, pracujeme pouze se zásobníky, a to tak, že symboly z prvního přepisujeme do druhého a tím obracíme jejich pořadí, po vyprázdnění prvního zásobníku je v druhém slovo  $w$ ,
- ve stavu  $q_2$  čteme druhou polovinu slova ze vstupní pásky a porovnáváme s obsahem druhého zásobníku.